पाठ 11

चतुर्भुजों को समझना

मुख्य अवधारणाएँ

- चतुर्भुजों को समझाना
- चतुर्भुज एवं वर्गीकरण
- चतुर्भुजों के प्रकार

सिखने के प्रतिफल

- कोणों के योग के गुणधर्म का प्रयोग कर चतुर्भुज के कोणों से संबंधित समस्याएँ हल करते हैं।
- समांतर चतुर्भुज के गुणधर्मों का सत्यापन करते हैं तथा इनके बीच संबंध–स्थापित करते हैं।

भूमिका

हम आसपास अनेक प्रकार की गोलाकार या चौकोर बंद आकृतियाँ देखते हैं जो समतलीय आकृतियाँ होती है। इन बंद आकृतियाँ जिनमें चार भुजाएं होती है, उन्हें चतुर्भुज कहते हैं। दरवाजा, खिड़कियां, किताब का ऊपरी पृष्ठ आदि चतुर्भुज के उदाहरण हैं।

चतुर्भुज की समझ

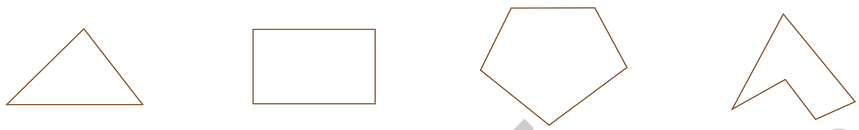
हम यदि पेंसिल से चार रेखाखण्डों से बना बंद वक्र खींचते हैं, तो बनी आकृति को चतुर्भुज कहते हैं। आपके वर्ग का श्यामपट्ट बेंच की ऊपरी सतह की आकृति, माचिस के डिब्बे की सतहें चतुर्भुज के आकार के होते हैं।

© JCERT not to be republished

JEPC Reference Book for Free Distribution : 2022-23

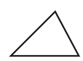
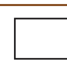
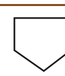
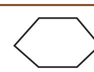
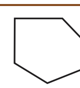
बहुभुज

वैसी समतलीय बंद आकृतियां जिनमें अनेक रेखाखण्ड होते हैं, बहुभुज कहलाती है। त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज आदि समतलीय आकृतियाँ बहुभुज है।



बहुभुजों का वर्गीकरण

बहुभुजों के उनके भुजाओं या शीर्षों की संख्या के आधार पर उन्हें अलग–अलग बांटा जाता है। जैसे –

भुजाओं / शीर्षों की संख्या	बहुभुज का प्रकार (वर्गीकरण)	आकृति
3	त्रिभुज	
4	चतुर्भुज	
5	पंचभुज	
6	षष्ट्भुज	
7	सप्तभुज	
8	अष्टभुज	
________	________	________
________	________	________
n	n-भुज	

उदाहरण 1. तीन रेखाखण्डों से बंद आकृति को क्या कहते हैं?

उत्तर : त्रिभुज कहते हैं।

© JCERT not to be republished

उदाहरण 2. एक पंचभुज में कितने शीर्ष होते हैं?

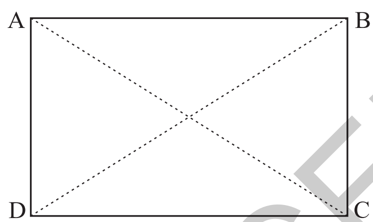
उत्तर : पंचभुज में पांच शीर्ष होते हैं।

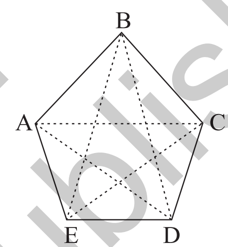
प्रश्नावली 11.1

1. त्रिभुजाकार आकृति में कितने भुजाएं होती है?
2. चतुभुर्जाकार आकृति के दो उदाहरण दें?

विकर्ण

किसी बहुभुज में अगल–बगल के शीर्षों को छोड़कर किन्हीं दो शीर्षों को मिलाने से प्राप्त रेखाखण्ड को विकर्ण कहते हैं।





ऊपर के आकृति में AC, BD एवं AC, AD, BD, BE आदि विकर्ण कहलाते हैं।

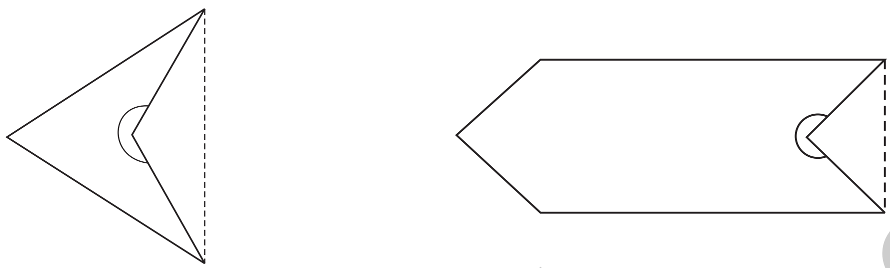
यदि किसी बहुभुज में भुजाओं की संख्या n है, तो उनके सभी विकर्णों की संख्या $\frac{n(n-3)}{2}$ सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है किसी बहुभुज के परिसीमा द्वारा घेरे गये अंदर के भाग को अभ्यंतर भाग तथा परिसीमा के बाहर के भाग को बहिर्भाग कहते हैं।

उत्तल और अवतल बहुभुज

वैसा बहुभुज जिसके सभी विकर्ण इसके अन्तः भाग में अवस्थित हो उन्हें उतल बहुभुज कहते हैं। इस प्रकार के बहुभुजों में प्रत्येक अन्तः कोणों का माप 180° से कम होता है।

© JCERT not to be republished

जिस बहुभुज के एक भी विकर्ण यदि उसके बहिर्भाग में होता है, तो उसे अवतल बहुभुज कहते हैं। इस प्रकार के बहुभुजों में कम से कम एक अंतः कोण 180° से बड़ा होता है।

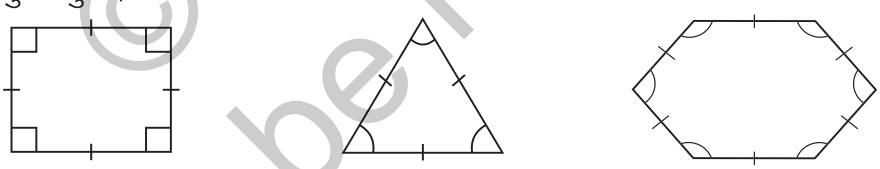


प्रश्नावली 11.2

1. एक चतुर्भुज में कितने विकर्ण होते हैं?
2. किसी बहुभुज में 6 भुजाएं हैं। इसके विकर्णों की संख्या बताएं?
3. एक बहुभुज का एक अन्तः कोण 195° का है। यह किस प्रकार का बहुभुज है?

सम और विषम बहुभुज

जिस बहुभुज में सभी भुजाएं एवं सभी कोणों बराबर होते हैं तो उसे सम बहुभुज कहते हैं। जैसे–वर्ग, समबाहु त्रिभुज।



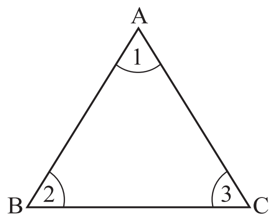
जिस बहुभुज में सभी भुजाएँ आपस में बराबर नहीं होते हैं उसे विषम बहुभुज कहते हैं। जैसे–आयत, समकोण त्रिभुज।

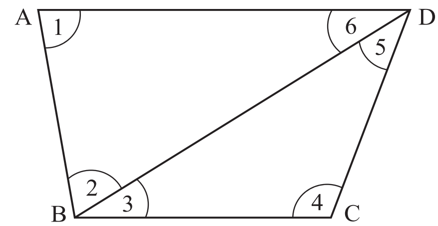
बहुभुजों के अन्तः कोणों एवं बाह्य कोणों का गुणधर्म

सभी बहुभुजों के सभी अन्तः कोणों का येागफल अलग–अलग होता है। त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° तथा चतुर्भुज का 360° होता है। इसी प्रकार पंचभुज, षट्भुज आदि के कोणों का योग भिन्न–भिन्न होता है।

© JCERT not to be republished

अन्तः कोणों का गुणधर्म—एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है। एक चतुर्भुज में दो त्रिभुजों की रचना करके सभी कोणों का योग 360° दिखाया जा सकता है।





त्रिभुज ABC में,

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$$

चतुर्भुज ABCD में

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = 180°$$

$$\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$$

जोड़ने पर

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360°$$

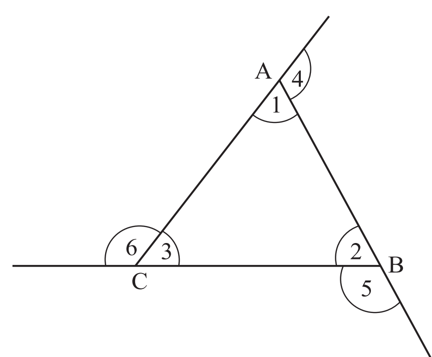
$$\angle 1 + (\angle 2 + \angle 3) + \angle 4 + (\angle 5 + \angle 6) = 360°$$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$

अतः एक चतुर्भुज के सभी अन्तः कोणों का योग 360° होता है। इसी प्रकार पंचभुज, भाट्भुज, आदि अन्य बहुभुजों का अन्तः कोणों का योग निकाल सकते हैं।

बहुभुज के बाह्य कोणों का गुणधर्म—किसी बहुभुज की एक भुजा को बढ़ाने पर बाह्य कोण बनता है।

त्रिभुज ABC में $\angle 4$, $\angle 5$ तथा $\angle 6$ बाह्य कोण हैं।



हम जानते हैं कि $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

रैखिक युग्म अभिगृहित से –

$$\angle 1 + \angle 4 = 180°$$

$$\angle 2 + \angle 5 = 180°$$

$$\angle 3 + \angle 6 = 180°$$

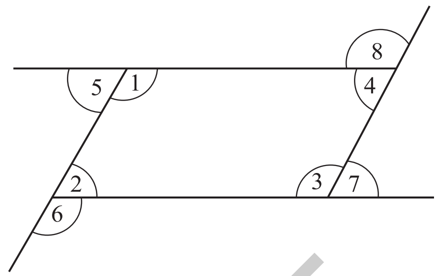
जोड़ने पर,

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 540°$$

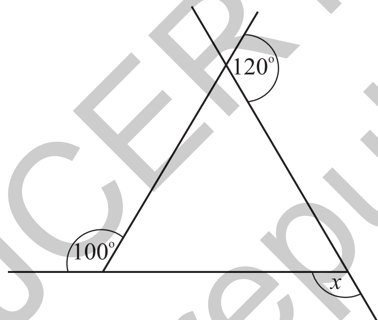
© JCERT not to be republished

$$180° + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 540°$$
$$\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 540° - 180°$$
$$= 360°$$

अतः त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग 180° होता है। इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं कि चतुर्भुज ABCD के सभी बाह्य कोणों का योग $\angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360°$ होता है।



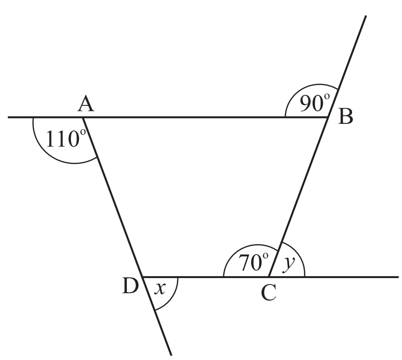
उदाहरण 3. दिये गये चित्र में x का मान निकालें।



हल : त्रिभुज के बाह्य कोणों से –

$$100° + 120° + x° = 360°$$
$$220° + x° = 360°$$
$$x° = 360° - 220°$$
$$x = 140°$$

उदाहरण 4. दिये गये चित्र में x का मान निकालें।



© JCERT not to be republished

हल : रैखिक युग्म से –

$$70^\circ + \angle y = 180^\circ$$

$$\angle y = 180^\circ \square 70^\circ = 110^\circ$$

बहुभुज के बाह्य कोण के गुण से–

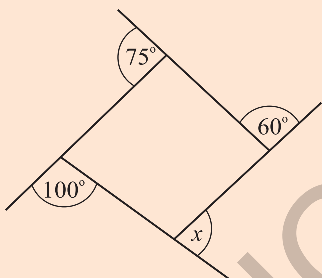
$$110^\circ + 90^\circ + 110^\circ + x = 360^\circ$$

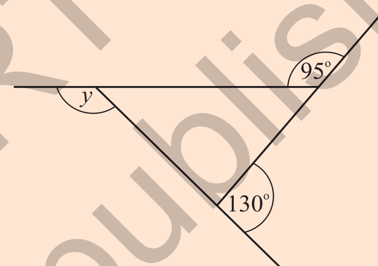
$$310^\circ + x = 360^\circ$$

$$x = 360^\circ - 310^\circ = 50^\circ$$

प्रश्नावली 11.3

1. दिये आकृतियों में x का मान निकालें–

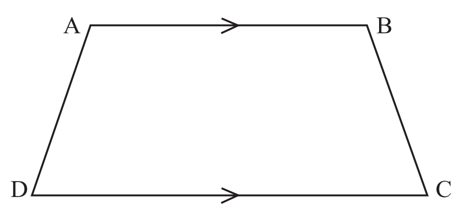




चतुर्भुज के प्रकार

चतुर्भुज की भुजाओं और कोणों के आधार पर चतुर्भुज अनेक प्रकार के होते हैं। जिसका अलग नाम दिया जाता है। जैसे – समलम्ब चतुर्भुज, समान्तर चतुर्भुज, आयत, वर्ग इत्यादि।

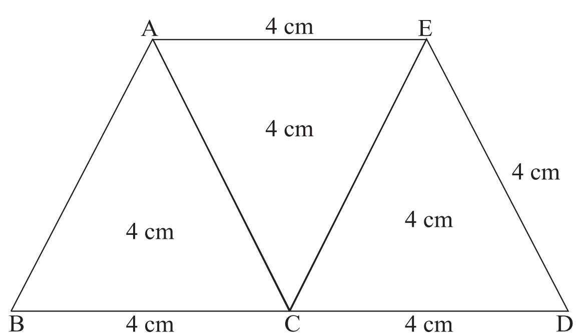
समलम्ब चतुर्भुज



ऐसा चतुर्भुज जिसमें कोई दो भुजाएं आपस में समानांतर हो उसे समलम्ब चतुर्भुज कहते हैं। दिये गये चतुर्भुज में ABCD में भुजाएं AB तथा CD समांतर है। इसीलिए यह एक समलम्ब चतुर्भुज हैं। इसे बराबर शीर्षलमब वाला चतुर्भुज भी कहते हैं।

रचना

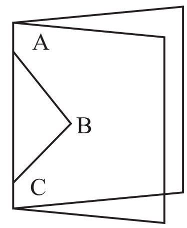
रंगीन कागज के तीन समबाहु त्रिभुज लेकर चित्रानुसार सजाने पर समलम्ब चतुर्भुज की आकृति बनेगा।

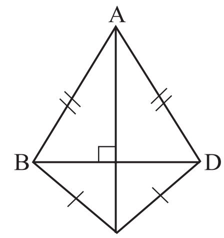


© JCERT not to be republished

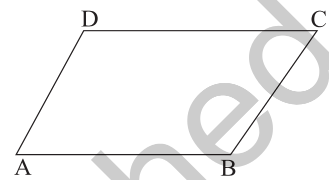
पतंग

यदि दो विषमबाहु त्रिभुजों के आकार में चार्ट पेपर को चित्रानुसार काटते हैं और खोलते हैं। तो एक चतुर्भुज ABCD मिलता है। इस विशेष चतुर्भुज को पतंग कहते हैं इसमें दोनों विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे पर लंब होते हैं।





समान्तर चतुर्भुज



वह चतुर्भुज जिनके सम्मुख भुजाएँ समान्तर होती है, उसे समान्तर चतुर्भुज कहते हैं। ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। जिसमें AB और DC तथा AD तथा BC सम्मुख भजाएँ हैं जो आपस में बराबर भी है।

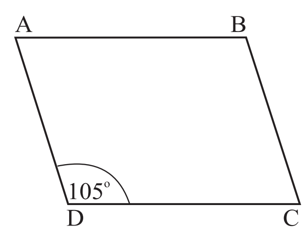
एक भुजा के बगल में दूसरी भुजा को आसन्न भुजा कहते हैं। $\angle A$ तथा $\angle \square$ आसन्न कोण कहलाते हैं। समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख कोण आपस में बराबर होते हैं।

$\angle A$ तथा $\angle C$ और $\angle \square$ तथा $\angle D$ सम्मुख कोण हैं, जो बराबर हैं।

$\angle A$ तथा $\angle \square$ आसन्न कोण हैं। यदि समांतर रेखाओं AB तथा DC में BC को तिर्यक रेखा मानते हैं, तो $\angle A$ तथा $\angle \square$ सम्पूरक कोण होते हैं। अर्थात् $\angle A + \angle \square = 180°$।

उदाहरण 5. समान्तर चतुर्भुज ABCD में यदि $\angle D = 105°$ तो शेष अन्य कोण ज्ञात करें।

हल : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।



$\therefore$ सम्मुख कोण से, $\angle \square = \angle D$

$\angle \square = 105°$

$\therefore$ AD$\|\square$C, $\angle D + \angle C = 180°$

$105° + \angle C = 180°$

$\angle C = 180° \;\square\; 105°$

$\angle C = 75°$

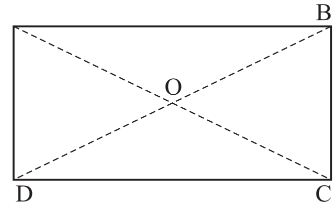
सम्मुख कोण से, $\angle A = \angle C = 75°$

अतः शेष अन्य कोण $\angle A = 75°$, $\angle \square = 105°$ तथा $\angle C = 75°$

© JCERT not to be republished

समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण

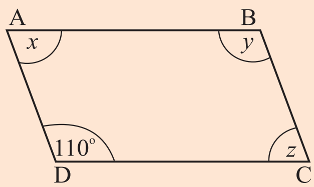
एक समान्तर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण बराबर माप के नहीं होते हैं। दोनों विकर्ण यदि समान्तर चतुर्भुज ABCD में AC तथा BD दोनों विकर्ण बिंदु O पर काटते हैं, तो AO = OC तथा DO = OB प्राप्त होता है।



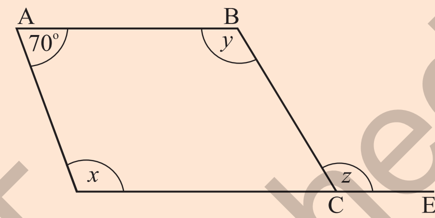
प्रश्नावली 11.4

1. दिये गये समान्तर चतुर्भुज में X, Y, Z का मान निकालें।

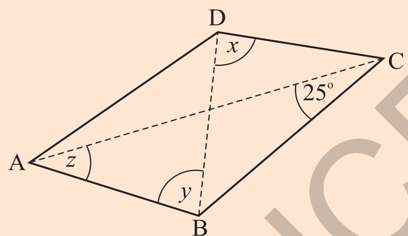
(i)



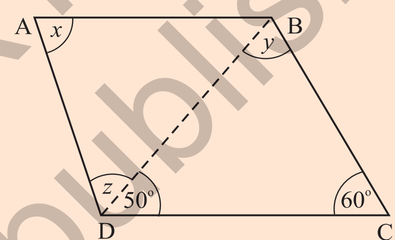
(ii)



(iii)

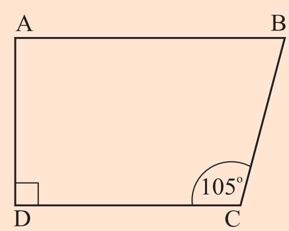


(iv)



2. एक समान्तर चतुर्भुज के दो आसन्न कोण का अनुपात 5 : 4 हो, तो समान्तर चतुर्भुज के सभी कोणों को ज्ञात करें।

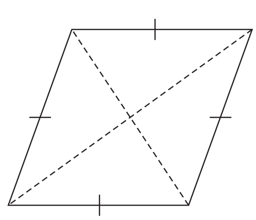
3. दिये गये आकृति में यदि AB || CD है, तो शेष सभी कोणों को ज्ञात करें। यह किस प्रकार का चतुर्भुज है?

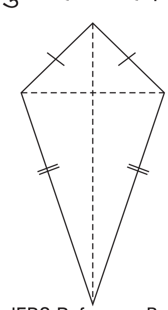


कुछ विशिष्ट समान्तर चतुर्भुज

समचतुर्भुज

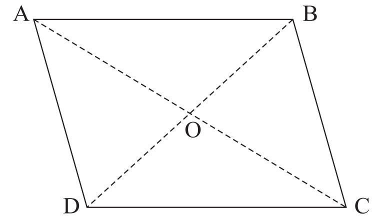
एक समचतुर्भुज में चारों भुजाएं बराबर लंबाई की होती है। इसलिए यह एक समान्तर चतुर्भुज भी है। समचतुर्भुज के दोनों विकर्ण बराबर लंबाई के नहीं होते हैं। लेकिन एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। इस चतुर्भुज में समान्तर चतुर्भुज एवं पतंग दोनों का गुण होता है।





© JCERT not to be republished

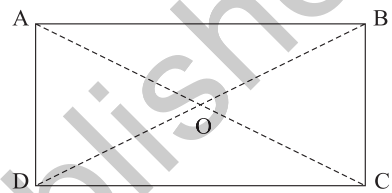
- चतुर्भुज ABCD में AC तथा BD विकर्ण हैं, दोनों बिंदु O पर काटते हैं।
- भुजाएं AB = BC = CD = DA तथा विकर्ण AC में BO = OD होता है।
- साथ ही ∠AOB = ∠BOC = ∠COD = ∠AOD = 90° होता है।



आयत

वैसा समान्तर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण 90° (समकोण) होता है, उसे आयत कहते हैं। इसके सम्मुख भुजाएं बराबर लंबाई के और समान्तर होते हैं, बड़ी भुजाओं की लंबाई तथा छोटी भुजाओं की चौड़ाई कहते हैं। आयत में समान्तर चतुर्भुज के सभी गुण होते हैं।

इसके दो विकर्ण आपस में बराबर लंबाई के होते हैं और एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। ABCD एक आयत है। AB तथा DC भुजाओं की लंबाई और AD तथा BC भुजाओं की चौड़ाई कहते हैं। AC तथा BD दो विकर्ण हैं। जो बिंदु O पर काटते हैं।



उदाहरण 6. आयत ABCD में x का मान बताएँ?

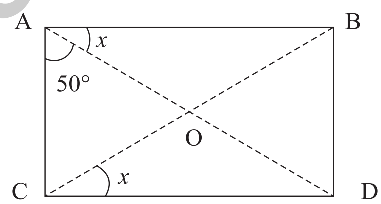
हल : आयत ABCD में जानते हैं कि

$$\angle CAO + \angle BAO = 90°$$

$$50 + x = 90°$$

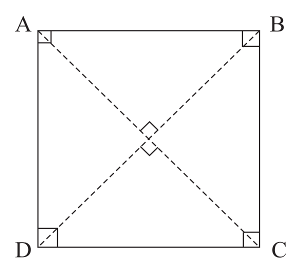
$$x = 90 - 40 = 40$$

$$\therefore \quad x = 40°$$



वर्ग

वैसा चतुर्भुज जिसके चारों भुजाएं बराबर और चारों कोण समकोण (90°) होता है। उसे वर्ग कहते हैं। वर्ग आयत का विशेष स्थिति है। आयत में दोनों विकर्ण एक दूसरे पर लंब नहीं हो सकते हैं। वर्ग में दोनों विकर्ण एक दूसरे पर लंब होते हैं। वर्ग तथा आयत दोनों में विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। ABCD एक वर्ग है। जिसमें AB = BC = CD = DA भुजाएं हैं। AC तथा BD विकर्ण हैं, तो बिंदु O पर काटते हैं।



© JCERT not to be republished

प्रश्नावली 11.5

1. निम्न कथनों को सत्य या असत्य की जाँच करें।

   (i) सभी वर्ग आयत है।

   (ii) सभी वर्ग समचतुर्भुज है।

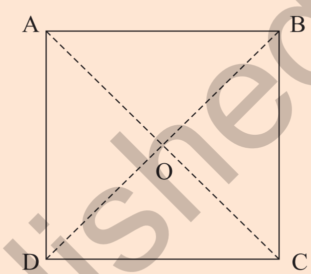
   (iii) सभी वर्ग समलम्ब होते हैं।

   (iv) सभी समान्तर चतुर्भुज समचतुर्भुज होते हैं।

2. दी गई आकृति में ABCD एक वर्ग है। इसमें x का मान ज्ञात करें।

$$AO = x + 1$$

$$BO = 2x - 3$$



3. दिखाइए की कैसे एक वर्ग एक आयत भी हो सकता है।

   [संकेत–सम्मुख भुजाएं बराबर एवं चारों कोण समकोण होते हैं]

उत्तरमाला

प्रश्नावली 11.1

1. 3
2. किताब के पृष्ठ, श्यामपट्ट की आकृति (उत्तर भिन्न हो सकते हैं)

प्रश्नावली 11.2

1. 2   2. 9   3. अवतल बहुभुज

प्रश्नावली 11.3

4. (i) 115   (ii) 135°

प्रश्नावली 11.4

1. (i) $x = 77°, y = 110°, z = 70°$ (ii) x = 110°, y = 110°, z = 70°

   (iii) x = 25°, y = 65°, z = 65°   (iv) x = 60°, y = 70°, z = 70°

2. 100°, 80°, 100°, 80°

प्रश्नावली 11.5

1. (i) सत्य   (ii) सत्य   (iii) असत्य   (iv) सत्य
2. 4

© JCERT not to be republished

© JCERT not to be republished