पाठ 14

द्विवीमीय (2D) आकृति के क्षेत्रफल (Area of two Dimensional Shapes)

मुख्य अवधारणाएँ

- ...
- ...
- ...
- ...

हम सिखेंगे

- (2–D) आकृति का क्षेत्रफल और परिमाप।

भूमिका :

हमने पिछली कक्षा में वर्ग, आयत, वृत्त, त्रिभुज आदि की परिमाप तथा उनके क्षेत्रफल सीख चुके हैं। इन सभी के आधार पर अपने दैनिक जीवन में दीवार, मकान की छत, खेल के मैदान, बरामदा आदि के क्षेत्रफल तथा उनका अनुप्रयोग की जानकारी हो चुकी है। यहाँ पर हम उनकी पुनरावृत्ति करेंगे।

परिमाप – किसी बन्द आकृति के चारों ओर एक चक्कर लगाने में तय की गई दूरी को ही उक्त आकृति की परिमाप कही जाती है।

आयात की परिमाप : आयत एक बन्द आकृति है। इसके चार कोण (प्रत्येक कोण 90 डिग्री), लम्बाई तथा- चौड़ाई होती है। इसमें दो समान माप की भुजाएं जिसे लम्बाई कहते हैं तथा दो समान भुजाएं चौड़ाई के रूप में होती हैं- जिसे निम्न आकृति द्वारा समझी जा सकती है।

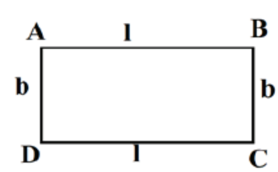
यहाँ पर ल० = और चौड़ाई = है।

अतः आयत की परिमाप $= l + b + l + b$

$= 2l + 2b$

$= 2\,(l + b)$

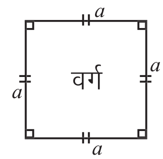
= 2 (लम्बाई + चौड़ाई)



© JCERT not to be republished

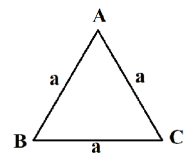
वर्ग की परिमाप : वर्ग भी एक आयत का ही स्वरूप होता है। पर इसके सभी किनारे समान माप के होते हैं।

आकृति में एक वर्ग है और a = भुजा



अतः वर्ग की परिमाप = $a + a + a + a = 4a = 4 \times$ एक भुजा

त्रिभुज की परिमाप : तीन मुजाओं से घिरी आकृति को त्रिभुज कहते है। विषमबाहू त्रिभुज की भुजाएं असमान होती है तथा समबाहु त्रिभुज की तीनों भुजाएं समान होती हैं।



आकृति में समबाहु त्रिभुज है जिसमें प्रत्येक भुजा = a

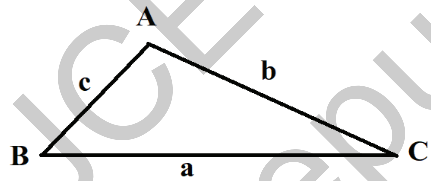
अतः समबाहु त्रिभुज की परिमाप $= a + a + a$

$= 3a$

= 3 x भुजा

इस प्रकार ऐसी आकृति जो समान माप की मुजाओं से घिरी हो उसे समबहुभुज कहते हैं। अतः n - समान माप की मुजाओं से बनी आकृति हो तो समबहुभुज की परिमाप = n x एक मुजा

यदि त्रिभुज विषम बाहु हो तो इस त्रिभुज की भुजाएं असमान माप की होगी |



यहाँ त्रिभुज ABC एक विषमबाहू त्रिभुज है

आकृति में एक विषम बाहु त्रिभुज है जिसमें भुजाएँ $a \neq b \neq c$

अतः परिमाप = a + b + c

क्षेत्रफल :- एक ऐसी बन्द आकृति जो किसी तल में घिरा क्षेत्र के रूप में हो, उसके कुल परिणाम को ही इस क्षेत्र का क्षेत्रफल कहते है। इस क्षेत्र में इकाई मुजा वाले वर्ग द्वारा घिरे क्षेत्र को मानक इकाई मान कर इसका क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

इसके लिए ग्राफ पेपर या सादे कागज पर वर्गाकार आकृति बनाकर इनकी मदद से क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात किया सकता है। वर्गों की गणना करते समय निमांकित जातों पर ध्यान देने की जरूरत है -

पूरे वर्ग = एक वर्ग इकाई,

आधा वर्ग = ½ × वर्ग इकाई

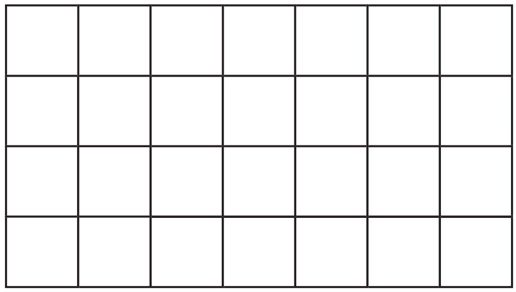
आधे से अधिक वर्ग = एक वर्ग इकाई ।

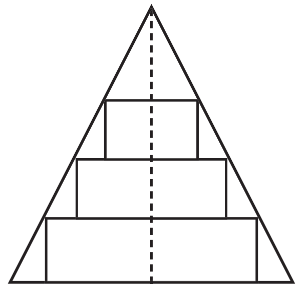
आधे से कम वर्ग = शून्य इकाई

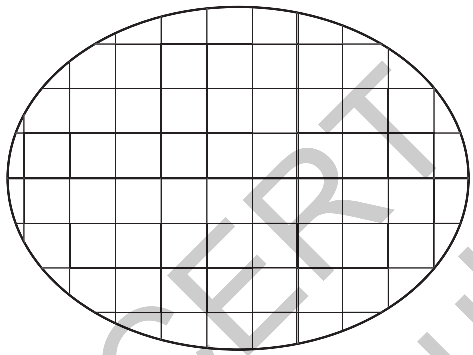
© JCERT not to be republished

अभ्यास के लिए

<u>निम्न</u> आकृति में वर्गों की गणना कर क्षेत्रफल ज्ञात करें |

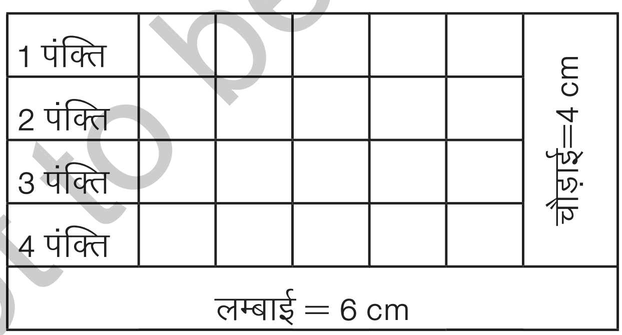






क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र : भिन्न-भिन्न आकृतिओं के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उनसे संबंधित तरीकों तथा सूत्रों का प्रति प्रादन किया गया है। आयत का क्षेत्रफल - चित्र में आयत की आकृति है, जिसका क्षेत्रफल इस विधि से ज्ञात करते हैं |

आयात का क्षेत्रफल = वर्गों की कुल सं० = 24 वर्ग इकाई



वर्गों की गणना के आधार पर आयात का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं –

आयात का क्षेत्रफल = पहली पंक्ति में वर्गों की संख्या + दूसरी पंक्ति में वर्गों की संख्या + तीसरी पंक्ति में वर्गों की सं० + चौथी पंक्ति में वर्गों की संख्या

© JCERT not to be republished

$= 6\ cm^2 + 6\ cm^2 + 6\ cm^2 + 6\ cm^2 = 4 \times 6\ cm^2 = 24\ cm^2$

अत: आयत का क्षेत्रफल = क्षैतिज वर्गों की संख्या + दूसरसी पंक्ति में वर्गों की संख्या + तीसरी पंक्ति में वर्गों की संख्या + चौथी पंक्ति में वर्गों की संख्या

$= 6\ cm^2 + 6\ cm^2 + 6\ cm^2 + 6\ cm^2 = 4 \times 6\ cm^2 = 24\ cm^2$

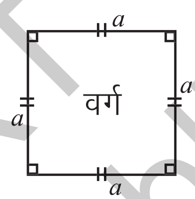
= लम्बाई x चौड़ाई = $l \times b$

जहाँ लम्बाई, चौड़ाई

वर्ग का क्षेत्रफल

वर्ग आयत का एक रूप है, परन्तु इसकी लम्बाई, चौड़ाई एक समान होती है अर्थात् –

लम्बाई = चौड़ाई



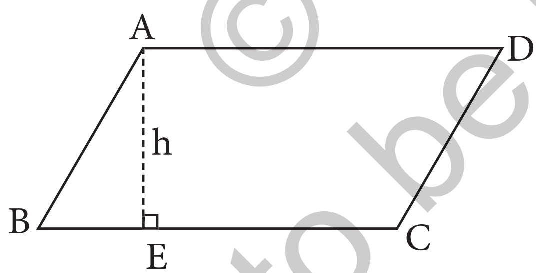
अत: वर्ग का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= भुजा x भुजा = भुज ^{2}

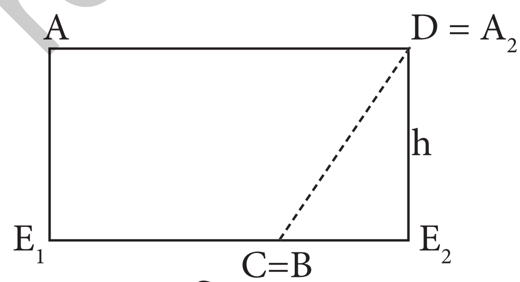
यदि वर्ग की एक भुजा = a हो तो

वर्ग का क्षेत्रफल = a x a = a^2 वर्ग इकाई

<u>समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल</u>



(चित्र-1)



(चित्र-2)

माना कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें AE BC है |

अब समकोण त्रिभुज ADE को काटकर (चित्र - 2 में) DC के पास रखते हैं तो हमें आयत A, E, E_2, A_2 प्राप्त होता है|. इस प्रकार से हमें समांतर चतुर्भुज ABCD आयात $A_1E_1E_2A_2$ का स्वरूप मिलता है।

अत: समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = आयत $A_1E_1E_2A_2$ का क्षेत्रफल

© JCERT not to be republished

= लम्बाई X चौड़ाई

= आधार (b) x ऊँचाई (h)

नोट- समांतर चतुर्भुज का आधार और इसकी ऊँचाई आयत के क्रमश: लम्बाई और चौड़ाई बन जाते हैं।

त्रिभुज का क्षेत्रफल–

यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण के अनुदिश काटा जाए तो हमें समान माप के दो त्रिभुज प्राप्त होते हैं।

त्रिभुजों को एक दूसरे पर रखा जाए तो वे दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूरी तरह ढक लेते हैं।

इस प्रकार से दो सर्वांगसम त्रिभुज प्राप्त होते हैं। क्षेत्रफल में दोनों बराबर हैं।

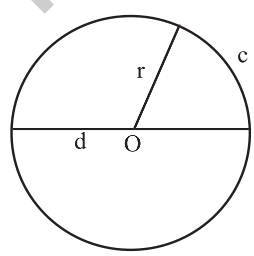
अत: समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 2 x एक त्रिभुज का क्षेत्रफल

त्रिभुज का क्षेत्रफल = ½ x समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= ½ x आधार (b) x ऊँचाई (h)

वर्ग इकाई

वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल



वृत्त का क्षेत्रफल

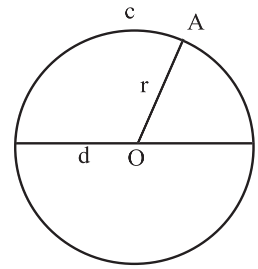
चित्र में एक वृत है | एक गोल घेरा है इसके बाहरी घेरा वृत की परिधि (c) है। इसके ठीक बीचों बीच एक बिन्दु O है जिसे वृत का केन्द्र कहते हैं।

© JCERT not to be republished

वृत्त के केन्द्र O से परिधि तक की दूरी त्रिज्या (r) कहलाती है। एक एक ऐसा रेखा-खण्ड जो वृत को दो समान भागों में बाँटता है, इसे व्यास (d) कहते हैं। इस तरह किसी भी वृत के लिए -

d = 2 x त्रिज्या = 2 r

$r =$ या अर्धव्यास $= \frac{\text{व्यास}}{2}$



वृत्त की परिधि और उसके व्यास में संबन्ध –

किसी भी वृत के लिए उसकी परिधि की माप तथा उसके व्यास की माप का अनुपात सदैव एक नियत राशि होती है।

या $\frac{\text{वृत्त की परिधि की माप}}{\text{वृत्त के व्यास की माप}} = \pi$ (पाई)

या $\frac{\text{वृत्त की परिधि की माप}}{d} = \pi$ (पाई)

वृत्त की परिधि $= \pi$ d

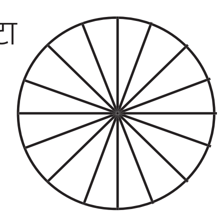
वृत्त की परिधि $= \pi \times 2r$

वृत्त की परिधि (C) = $2 \pi r$

नोट - π एक ग्रीक भाषा का अक्षर है | गणित में इसका मान π $\frac{22}{7}$ = 3.14 लगभग माना जाता है

वृत का क्षेत्रफल :

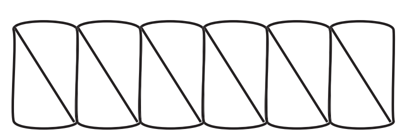
यह एक वृत की आकृति है। माना कि वृत्त की त्रिज्या r है| आकृति में बने त्रिज्या खण्डों को काट कर उन्हें सजाया जाए तो हमें एक आयत की आकृति मिलेगी। वृत की त्रिज्या खण्ड जितना ही छोटा होगा आयत उतना स्पष्ट बनेगा।



बने आयत की ल० = वृतकी परिधि/ 2 $= \frac{2\pi r}{2} \pi r$

और आयत की चौ. = r

अत: आयत का क्षेत्रफल = ल०xचौ०



आयत

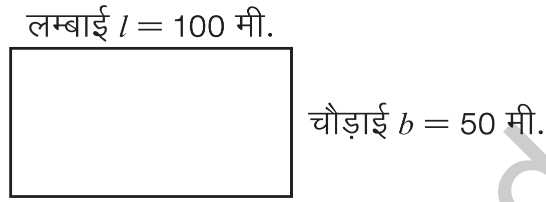
© JCERT not to be republished

$\pi r \times r$ वर्ग इकाई

अतः वृत का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

उदाहरण 1 - 100 मी0 लम्बे और 50 मी० चौड़े आयताकार बगीचे के चारों ओर बाड़ लगाना है। 50 पैसे प्रति सेंटीमीटर की दर से बाड़ लगाने का खर्च क्या होगा ?

हल - आयताकार बगीचे की परिमाप =



= 2x (100 + 50)

= 2x150 मी = 300 मी०

= 300 x 100 cm = 30000 cm

बाड़ लगाने का खर्च = 50 पैसे x 30000 cm

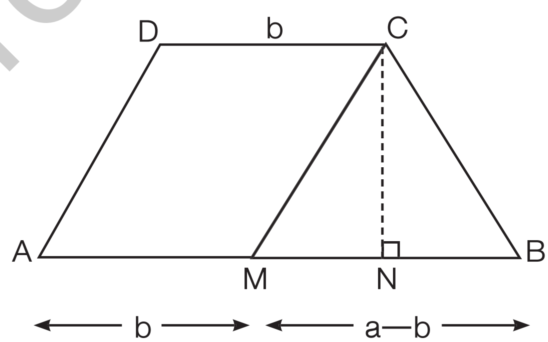
= 1500000 पैसा = 15000 रूपये

समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल :

अभी तक हमें आयत, वर्ग आदि रूपों वाले चतुर्भुज की परिमाप एवं क्षेत्रफल की जानकारी हो चुकी है। समलम्ब चतुर्भुज भी उनमें से एक है।

एक ऐसा चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं और अन्य दो भुजाएं समांतर नहीं होती हैं।

आकृति ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, जिसमें AB || CD और CN ऊँचाई है। यहाँ पर AB = a, CD= b , ऊँचाई CN = h है | अब समलम्ब चतुर्भुज ABCD को दो भागों में बाटते हैं। पहला भाग AMCD समांतर चतुर्भुज है और दूसरा भाग त्रिभुज MBC हैं |



यहाँ AM = DC =b, AB = a, CN = h, AB = AM+ MB

माना a = b + MB या MB = a – b

अब समलम्ब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

= समांतर चतुर्भुज AMCD का क्षेत्रफल + त्रिभुज MBC का क्षेत्रफल

© JCERT not to be republished

= आधार x ऊँचाई + 1/2 x आधार X उँचाई

= AM X CN + ½ X MB X CN

= b h + ½ × (a-b) h = ½ × h (2b + a-b) = ½ × h (a+b)

अत: समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ½ × (समांतर भुजाओं के योग) x ऊंचाई

उदाहरण 2 : एक समलम्ब चतुर्भुजाकार का खेत है जिसका क्षेत्रफल $480m^2$ है। समांतर भुजाओ के बीच की दूरी 15 m है। समांतर भुजाओं मे से एक मुजा की लम्बाई 20m है। दूसरी मुजा की लम्बाई ज्ञात करें |

हल : खेत का क्षेत्रफल = $480m^2$

एक भुजा a = 20 m, ऊँचाई h=15 m

माना कि दूसरी भुजा = X m

अत: समलम्ब चतुर्भुजाकर खेत का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times (20 + X) \times 15 = 480m^2$

$$\rightarrow (20 + x) = \frac{(480 \times 2)}{15}$$

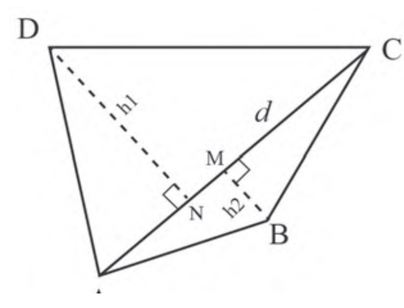
$$\therefore \; x + 20 = 64$$

$$x = 64 - 20 = 44\, m$$

अतः दूसरी समांतर भुजा की लम्बाई = 44 m

सामान्य चतुर्भुज का क्षेत्रफल : कुछ ऐसे अनियमिताकार चतुर्भुज होते हैं जिनका क्षेत्रफल सीधे रूप से निकालना आसान नहीं होता है। सुविधानुसार ऐसे चतुर्भुज के अन्दर कुछ आकृतियाँ बनाते हैं जिनका क्षेत्रफल सूत्रों के द्वारा अलग-अलग क्षेत्रफल ज्ञात कर उनका योग निकालने पर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं |

ABCD एक चतुर्भुज है। विकर्ण AC मिलाते हैं। इस प्रकार दिया गया चतुर्भुज दो त्रिभुजों ADC और ABC दो भागों में बट जाता है। यदि दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल निकालकर जोड़ देने पर चतुर्भुज का क्षेत्रफल प्राप्त हो जाता है।



यहाँ DN = h_1 और BM = h_2 क्रमश: त्रिभुज ADC और ABC की उचाई है तथा विकर्ण AC = d है।

© JCERT not to be republished

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = त्रिभुज ADC का क्षेत्र0 + त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

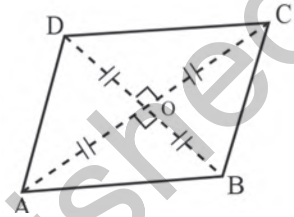
= ½ x AC x DN x + ½ x AC x BM

= ½ x d x h_1 + ½ x d x h_2 = ½ x d (h_1 + h_2)

अतः चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ½ X विकर्ण x (उच्चाइयों का योग)

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल :

ऐसा चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएं परस्पर समान होती हैं, कोण समकोण नहीं होते है| विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर सम्द्विभाजित करते हैं।



ABCD एक समचतुर्भुज है। जिसके विकर्ण A C तथा BD है।

जो एक दूसरे के लम्ब सम द्विभाजक हैं। AC ⊥ BD

AO = CO तथा BO = DO

समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABD का क्षे0 + त्रिभुज BCD का क्षे0

= ½ x BD x AO + ½ x BD x CO

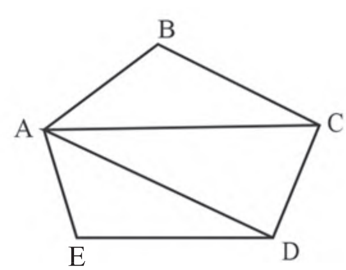
= ½ x BD (AO + CO) = ½ x BD x AC = ½ x d_1 x d_2

अत: समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = ½ X पहला विकर्ण x दूसरा विकण

सम चतुर्भुज : सम चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है | अतः समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र उपयोग कर सकते है।

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई।

बहुभुज का क्षेत्रफल : तीन या तीन से अधिक भुजाओं से घिरे क्षेत्र को बहुभुज क्षेत्र कहते हैं। जिनका क्षेत्रफल निकालने के लिए उन्हें नियमित आकार में रुपान्तरण कर उनका क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है। कोई चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उसे दो त्रिभुजों में बाँट कर अलग-अलग क्षेत्रफल निकालकर कुल क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है।

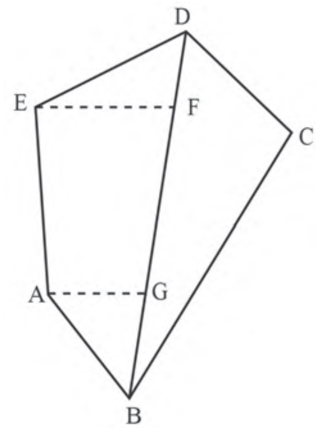


आकृति में ABCDE एक पंचभुज क्षेत्र है जिसे तीन त्रिभुजों में बाँट दिया गया है।

अत: पंचभुज ABCDE का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल + त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल + त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल

© JCERT not to be republished

इसी प्रकार एक अन्य पंचभुज जिसका क्षेत्रफल निम्नांकित चित्र के आधार पर ज्ञात कर सकते है -

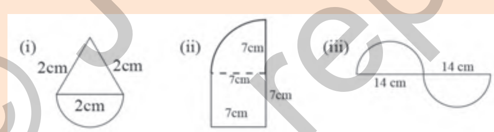


इस प्रकार दिए पंचमुज ABCDE का क्षेत्रफल तीन त्रिभुजों तथा एक समलम्ब चतुर्भुज के क्षेत्रफल के योगफल के बराबर है |

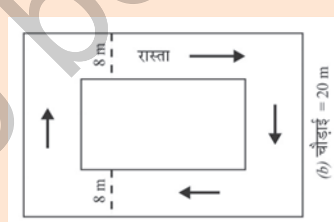
अत: पंचभुज ABCDE का क्षेत्रफल = त्रिभुज DEF का क्षेत्रफल + त्रिभुज BCD का क्षेत्रफल + त्रिभुज ABG का क्षेत्र0 + समलम्ब चतुर्भुज AEFG का क्षेत्रफल |

प्रशनावली 14.1

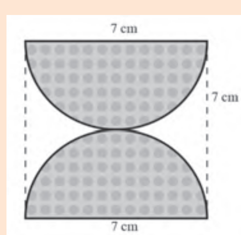
1. निम्न आकृतियों की परिमाप ज्ञात करें –



2. (i) आकृति में रास्ते का क्षेत्रफल निकालें –



(ii) छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें –



©JCERT not to be republished

3. 300 मी0 लम्बे और 200 मी0 चौड़ाई वाले एक बाग के चारों ओर बाढ़ लगाने का खर्च ज्ञात करें | यदि 30 रु0 प्रति मीटर की दर से व्यय होता है |

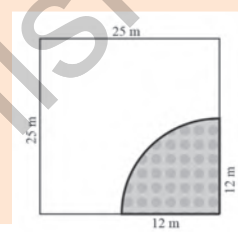
4. एक टाइल की लम्बाई 12 cm और चौड़ाई 10 cm है। एक दीवार जिसकी नाप 3 m x 3 m है। दीवार में ऐसे कितने टाइल्स लगेंगे ? एक टाइल की कीमत 2 रु0 है तो व्यय कितना होगा ?

5. 18 cm व्यास वाले वृताकार प्लेट पर किनारे पर अंदर की ओर 4 cm चाड़ाई का डिजाइन बना है डिजाइन वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें |

6. 30 मीटर वाले भुजा के एक वर्गाकार पार्क के मध्य में दो रास्ते एक दूसरे को लम्बवत काटते हैं। यदि रास्ते की चौड़ाई 2 मीटर है तो रास्ते का क्षेत्रफल क्या है ?

7. किसी आयताकार क्षेत्र की लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात 4:1 है। यदि इसका क्षेत्रफल 1600 m^2 तो 10 रुपये प्रति मीटर की दर से घेरने का खर्च क्या होगा ?

8. 25 मीटर वाले वर्गाकार खेत के एक कोने पर 14 मी0 लम्बी रस्सी से एक गाय बान्धी गयी है। गाय अधिकतम कितने भाग में घास चर सकती है और खेत का कितना क्षेत्र शेष रह जायेगा ?



प्रशनावली 14.2

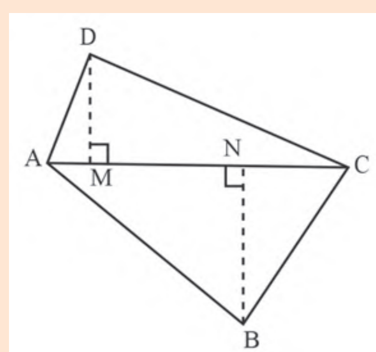
1. निम्नलिखित समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएं तथा उनकी ऊँचाइयाँ दी गयी है | क्षेत्रफल ज्ञात करें।

   (i) समांतर भुजाए 12cm का 20 cm तथा उचाई = 10 cm

   (ii) समातर भुजाएं 34cm और 46cm और ऊँचाई = 24cm

2. किसी समलम्ब चतुर्भुज की भुजाओं का योग 60 cm है और उनके बीच की दूरी 15 cm है, उसका क्षेत्रफल ज्ञात करें।

3. किसी समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 176 cm^2 है। समांतर भुजाओं में से एक भुजा 14 cm है और ऊंचाई 8 cm है तो दूसरी समातर भुजा ज्ञात करें।



4. निम समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिनके विकर्ण इस प्रकार हैं :

© JCERT not to be republished

(i) पहला विकर्ण =16 cm, दूसरा विकर्ण = 30cm है |

(ii) पहला विकर्ण = 9.6cm, दूसरा विकर्ण 4.5 cm है |

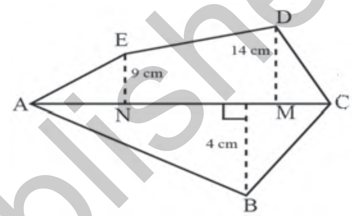
5. चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल बात करें -

AC = 24 cm, DM AC, BN AC, DM =7 cm BN = 8cm

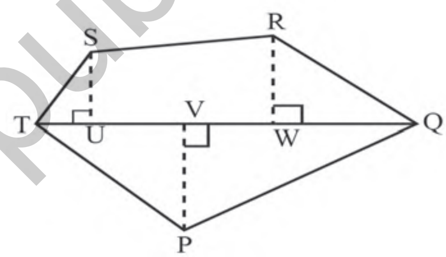
6. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसकी भुजा 10 cm और और ऊँचाई 9.6 cm है। यदि एक विकर्ण की लम्बाई 12 cm है। तो तो दूसरे विकर्ण की लम्बाई ज्ञात करें।

7. किसी चतुर्भुज का एक विकर्ण 18 मी. लम्बा है, और सम्मुख शीर्ष से विकर्ण पर डाले गए 9.5 मी. तथा 6.5 मी0 है तो चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें |

8. पंचभुज ABCDE का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसमें BLAC, DMAC, तथा AC = 16 cm, AM = 12 cm, AN = 6 cm, BL = 4 cm, DM = 14 cm, EN = 9 cm



9. निम्न पंचभुज का क्षेत्रफल बात करें - जिसमें PVQT, SUQT, RW QT तथा QT=10cm, QU=7 cm, QW=3 cm, PV=4 cm, SU= 5 cm, RW= 6 cm



© JCERT not to be republished