पाठ 15

त्रिविमीय आकृति का क्षेत्रफल और आयतन

मुख्य अवधारणायें–

- द्विविमीय आकृति
- द्विविमीय आकृति का क्षेत्रफल और परिमाप
- त्रिविमीय आकृति
- त्रिविमीय आकृति का क्षेत्रफल/पृष्ठ क्षेत्रफल
- त्रिविमीय आकृति का आयतन

© JCERT not to be republished

अधिगम प्रतिफल

- 3D वस्तुओं की पहचान करते हैं।
- 3D वस्तुओं का पृष्ठ क्षेत्रफल निकालते हैं।
- 3D वस्तुओं का आयतन निकालते हैं।
- 3D वस्तुओं के पृष्ठ क्षेत्रफल और आयतन के ज्ञान का अपने दैनिक जीवन में उपयोग करते है।

भूमिका :

हमारे वातावरण में अनेक रूप रंग आकार की वस्तुएँ हैं। इन वस्तुओं को हम अनेक प्रकार से मापते हैं। कुछ वस्तुओं में केवल लम्बाई होती है। कुछ में लम्बाई और चौड़ाई होती है। तथा कुछ में लम्बाई तथा चौड़ाई के साथ ऊँचाई भी होती है। जिन वस्तुओं की लम्बाई तथा चौड़ाई होती है उन्हें द्विविमीय या 2D आकृति/वस्तुएं कही जाती है। जिन वस्तुओं की लम्बाई के साथ चौड़ाई तथा ऊंचाई दोनो होती हैं तब उन्हें 3D आकृतियाँ कही जाती है। हमने एक विमीय द्विविमीय वस्तुओं की माप और अध्ययन किया है। इस प्रकार अब हमें त्रिविमीय वस्तुओं और आकृतियो का अध्ययन करना है। वास्तव में द्विविमिमि आकृतिओं का तह बनाने पर त्रिविमीय आकृतियाँ प्राप्त होती है।

JEPC Reference Book for Free Distribution : 2022-23

द्विविमीय आकृतिः वैसी आकृति जिसकी दो विमाएँ होती हैं उसे द्विविमीय आकृति कहते हैं।

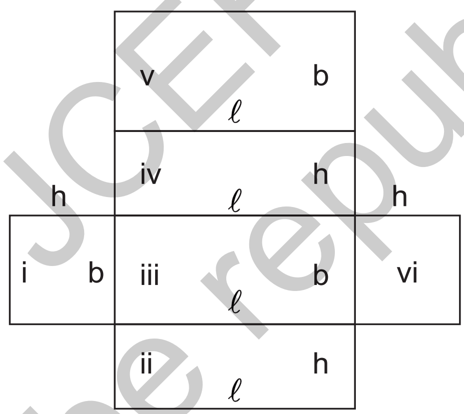
त्रिविमीय आकृतिः वैसी आकृतियाँ जिनकी तीन विमायें होती है उन्हे त्रिविमीय कहते हैं।

चित्र

स्पष्ट है कि द्विवविमिय आकृतियों में केवल लम्बाई और चौड़ाई होती है लेकिन त्रिविमीय आकृतियों में लम्बाई ओर चौड़ाई के साथ ऊंचाई भी होती है। द्विविमीय आकृतियो द्वारा घेरे गए तल। क्षेत्र को उसका क्षेत्रफल बोलते है और उसमें चारों ओर एक चक्कर लगाने में तय दूरी को उसका परिमाप कहते है। त्रिविमीय आकृतियों का अध्ययन हम उनके पृष्ठ क्षेत्रफल और आयतन की गणना करके करते हैं।

पृष्ठीय क्षेत्रफलः पृष्ठीय क्षेत्रफल से तात्पर्य उन सतहों के कुल क्षेत्रफल से है जिनसे मिलकर आकृति बनी हैं।

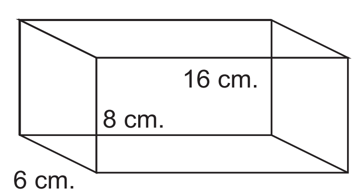
घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफलः कोई भी डिब्बा लेते हैं– साबुन, टुथपेस्ट, मोबाईल आदि। डिब्बे को खोलकर फैला देते हैं।



घनाभ का पृष्ठ क्षे०: क्षे० (1)

जहाँ l = लम्बाई, b = चौड़ाई तथा h = ऊँचाई

1 एक घनाभकार डिब्बे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 16cm, 8cm तथा 6cm है। डिब्बे का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



दी गई आकृति की लम्बाई चौड़ाई तथा ऊँचाई अलग अलग है अतः यह आकृति एक घनाभ है।

© JCERT not to be republished

l = 16cm, b = 8cm, h = 6cm

आवश्यक पृष्ठ क्षेत्रफल – 2

2 यदि किसी घनाभ की लम्बाई चौड़ाई तथा ऊँचाई बराबर हो तो उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या होगा।

घनाभ का पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल: घनाभ के ऊपर तथा नीचे के पृष्ठों को छोड़कर बाकी 4 पृष्ठों के क्षेत्रफल को घनाभ के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल कहा जाता है।

उस घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसकी लम्बाई – 10cm, चौड़ाई – 8cm और ऊंचाई – 6cm हों।

चित्र

4 उस घनाभाकार बक्से का पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालिए जिसका उपरी पृष्ठीय खुला हुआ है और लम्बाई – 10cm, चौड़ाई – 8cm और ऊँचाई 6cm हो।

चित्र

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल: जब किसी ज्यामितीय आकृति की लम्बाई चौड़ाई तथा ऊँचाई बराबर है तब इस ज्यामितीय इकाई को धन कहते हैं।

चित्र

यहाँ यानि लम्बाई – चौड़ाई – ऊंचाई

घन का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल – सूत्र

घन के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल: 3 घन का पार्श्व तथा संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात है। सूत्र

बेलन या लम्ब वृत्तीय वेलन: किसी आयताकार कागज या चादर के एक किनारे को स्थिर रखकर लम्बाई या चौड़ाई के अनुदिश मोड़ने पर जो संरचना (आकृति) बनती है उसे लम्ब वृत्तीय बेलन कहते है। इसे इस प्रकार भी परिभाषित कर सकते हैं–

लम्ब वृत्तीय बेलन उस बेलन को कहते हैं जिसके वृत्ताकार फलकों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा उसके आधार पर लम्ब हो।

चित्र

बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल: आयाताकार आकृति $abcd$ को लेते है और जब उसे रोल करते हैं इस प्रकार कि उसके किनारे AD तथा BC एक दूसरें से मिल जाते हैं तो बेलनाकार आकृति बनती है। यह एक लम्ब वृत्तीय बेलन है।

चित्र

© JCERT not to be republished

स्पष्ट है कि h – बेलन की ऊँचाई – आयत की चौडाई – b तथा बेलन की परिधि – आयात की लम्बाई – l

बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफलः आयत का क्षेत्रफल – लम्बाई चौड़ाई

बेलन के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल – 2 × बेलन का आधार क्षेत्रफल + बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल। 14m त्रिज्या तथा 3m ऊँचाई वाले एक बंद बेलनाकार टंकी किसी धातु से बनी है। उसे बनाने के लिए आवश्यक धातु की मात्रा ज्ञात करें।

आवश्यक धातु की मात्रा

• आवश्यक धातु का क्षेत्रफल • बेलनाकार टंकी के वक्रपृष्ट का क्षेत्रफल

अतः दी गई टंकी बनाने हेतु 176 धातु की मात्रा चाहिए।

2 किस डिब्बे का पार्श्व पृष्टीय क्षेत्रफल अधिक है।

चित्र

आयतनः सभी पदार्थ स्थान घेरते हैं इसी स्थान त्रिवमीय स्थान की मात्रा की माप को आयतन कहते हैं। एक विमीय आकृतियाँ जैसे रेखा एवं द्विवमीय आकृतियाँ जैसे त्रिभुज चतुर्भुज वर्ग आदि का आयतन शून्य होता है। त्रिवमीय आकृतियाँ जैसे– घन, घनाभ, गोला, शंकु बेलन आदि का आयतन होता है।

आयतन का मात्रकः आयतन का मात्रक धन इकाई आदि होते हैं।

घनाभ का आयतनः घनाभ का आधार एक आयतन होता हैं। अनेक समान आकार के आयतों को जब हम एक के ऊपर एक सजाते हैं तब एक घनाभ बन जाता है अर्थात आयताकार आकृति कुछ ऊँची हो जाती है। अतः यह एक 3D स्थान छेकती है। अतः इसका कुछ आयतन हो जाता है।

इस प्रकार घनाभ का आयतन – लम्बाई × चौडाई × ऊँचाई

घन का आयतनः जिस तरह घनाभ का आधार एक आयतन होता है उसी प्रकार घन का आधार एक वर्ग होता है और वर्ग की भुजा के बराबर ही उसकी ऊँचाई होती है। अतः वर्ग की लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई बराबर होती है।

घन की लम्बाई – चौड़ाई – ऊँचाई

घन का आयतनः

1. यदि किसी घन के प्रत्येक किनारे को तिगुना कर दिया जाय। तो इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितना गुना वृद्धि होगी। इसके आयतन में कितना गुना वृद्धि होगी। माना एक धन है जिसके किनारों की लम्बाई है।

© JCERT not to be republished

चित्र

जब धन के किनारों को तीन गुना अर्थात 3 कर दिया गया।

1. भुजा वाले घन का पृष्ठ क्षेत्रफल – भुजा वाले घन का पृष्ठ क्षेत्रफल

   पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि –

2. भुजा वाले धन का आयतन – आयतन में वृद्धि।

   एक घनाभ का आयतन 168 तथा आधार का क्षेत्रफल 28 है। घनाभ की ऊँचाई है ज्ञात कीजिए।

3. 56, 0.4, 0.25 माप वाले कार्टुन बॉक्स में माप की कितनी साबुन टिकिया रखी जा सकती हैं।
4. एक कमरे की लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई कृमशः 8, 6.5 और 3.5 है। कमरे में स्थित हवा का आयतन ज्ञात करें।
5. एक बेलन का आयतन 1.54 है तथा उसका व्यास 140 है तो बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
6. ऐसे घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 15 चौड़ाई 12 और आयतन 900 है।

बेलन का आयतनः हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन उसके आधार के क्षेत्रफल और उसकी ऊँचाई का गुणनफल है। इसी प्रकार बेलन के वृत्ताकार आधार के क्षेत्रफल में उसकी ऊँचाई से गुण करने पर उसका आयतन निकलता है।

लंब वृत्तीय बेलन का आयतन – बेलन का आधार का क्षे॰ × ऊँचाई

1. एक लम्बवृत्तीय बेलन का व्यास 21 तथा ऊँचाई 10 है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

   – बेलन का व्यास – 21

   बेलन का त्रिज्या– व्यास / 2

   बेलन का आयतन – $\pi r^2 h = \frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\cancel{2}} \times \frac{21}{\cancel{2}} \overset{5}{\cancel{10}} = 11 \times 3 \times 21 \times 5 = 346\ 5$ वर्ग इकाई

2. एक बेलनाकार टैंक की क्षमता 5632 है। यदि इसके आधार का व्यास 16 है तो टैंक की गहराई ज्ञात कीजिए।

   टैक की गहराई– सूत्र

3. एक दूध के बेलनाकार टैंकर की त्रिज्या 1.5 तथा लम्बाई 7 है। टैकर में अधिकतम कितना लीटर दूध जा सकता है।

सूत्रः

1. अपने वातावरण से विभित्र प्रकार की वस्तुएँ करें और उनमें से धन घनाभ बेलन की आकृति की वस्तुओं को छोटें और निम्नसारणी में अंकित करें।

© JCERT not to be republished

चित्र

2. एक बेलन का व्यास 14 है तथा ऊँचाई 28 हैं।बेलन का व्यास 28 तथा ऊँचाई 14 है। दोनों में से किसका आयतन अधिक है। क्या इनके पृष्ठीय क्षेत्रफल में भी अंतर हैं।

चित्र

किसका आयतन अधिक है।

दोनों का पृष्ठ क्षेत्रफल समाज है।

3. 14 व्यास वाला एक कुँआ 20 गहरा खोदा गया, जिसमें से निकली गिट्टी से 14 लम्बाई और 11 चौड़ाई वाले आयताकार क्षेत्र में समान रूप से फैलाकर एक चबूतरा बनाया गया है। चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात करें।

© JCERT not to be republished