पाठ 02

वर्ग और वर्गमूल

मुख्य अवधारणाएँ

- संख्या का वर्ग?
- पाइथागोरस त्रिक
- पूर्ण वर्ग संख्या
- वर्गमूल ज्ञात करना

सिखने के प्रतिफल

- संख्याओं के वर्ग तथा वर्गमूल विभिन्न तरीकों से ज्ञात करते हैं।
- वर्ग संख्या के प्रतिरूप को समझना है।
- दशमलव संख्याओं का वर्ग एवं वर्गमूल ज्ञात करना है।

भूमिका : पूर्व की कक्षा में हमने वर्ग के बारे में पढ़ा है, सामान्यतः 'वर्ग' का अध्ययन तीन रूपों में किया जाता है—

1. **ज्ञान के लिए (For knowledge) :** अंकगणितीय रूप में किसी को उसी संख्या से गुणा करना।
2. **समझ के लिए (For understanding) :** ज्यामितीय रूप में चतुर्भुज के रूप में समझ।
3. **अनुप्रयोग के लिए (For application) :** क्षेत्रमिति के रूप में वर्गाकार खेत/मैदान/पार्क आदि के माप करना।

इस पाठ में हम लोग अंकगणितीय रूप में

किसी संख्या के वर्ग एवं वर्गमूल के बारे में अध्ययन करेंगे।

© JCERT not to be republished

संख्या का वर्ग

किसी संख्या को उसी संख्या के गुणा करने पर जो गुणनफल प्राप्त होता है, यह उस संख्या का वर्ग होता है।

जैसे– $1 \times 1 = 1 = 1$ का वर्ग जसे 1^2 लिखा जाता है।

$2 \times 2 = 4 = 2$ का वर्ग जिसे 2^2 लिखा जाता है।

$3 \times 3 = 9 = 3$ का वर्ग जिसे 3^2 लिखा जाता है।

$4 \times 4 = 16 = 4$ का वर्ग जिसे 4^2 लिखा जाता है।

$5 \times 5 = - =$ ____

$6 \times 6 = - =$ ____

$7 \times 7 = - =$ ____

इस प्रकार 1, 4, 9, 16 तथा .... क्रमशः 1, 2, 3, 4 तथा .... का वर्ग है।

यदि p और q प्राकृत संख्याएँ इस प्रकार हों कि $p = q^2$ तो p को पूर्ण वर्ग प्राकृत संख्या या पूर्ण वर्ग संख्या कहते हैं।

इन्हें याद रखें :

संख्या	संख्या का वर्ग	संख्या के वर्ग का मान	संख्या	संख्या का वर्ग	संख्या के वर्ग का मान
1	1^2	1	16	16^2	256
2	2^2	4	17	17^2	289
3	3^2	9	18	18^2	324
4	4^2	16	19	19^2	361
5	5^2	25	20	20^2	400
6	6^2	36	21	21^2	441
7	7^2	49	22	22^2	484
8	8^2	64	23	23^2	529
9	9^2	81	24	24^2	576
10	10^2	100	25	25^2	625
11	11^2	121	26	26^2	676
12	12^2	144	27	27^2	729
13	13^2	169	28	28^2	784
14	14^2	196	29	29^2	841
15	15^2	225	30	30^2	900

© JCERT not to be republished

उपर्युक्त सारणी में वर्ग संख्याओं के अध्ययन करने से ज्ञात होता है कि ये सभी संख्याएँ इकाई स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त होती है। उनमें से किसी भी संख्या के इकाई स्थान पर 2, 3, 7 या 8 नहीं आती है।

पूर्ण वर्ग संख्याओं के कुछ गुण :

1. जिस संख्या के इकाई स्थान पर 2, 3, 7 तथा 8 रहता है यह पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हो सकती है।

   जैसे : 12, 13, 17, 18, 232, 453, 457, 668, ... इत्यादि।

   तथा 67852, 64853, 123467 तथा 45698 पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं? सोचिए।

2. सम संख्याओं का वर्ग हमेशा सम संख्या होती है।

   जैसे : $2^2 = 4$, $8^2 = 64$, $12^2 = 144$, $28^2 = 784$, $32^2 = 1024$ इत्यादि।

2	4	8	64	12	144	28	784	32	1024
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
सम संख्या	सम संख्या	सम संख्या	सम संख्या	सम संख्या	सम संख्या	सम संख्या	सम संख्या	सम संख्या	सम संख्या

3. विषम संख्याओं का वर्ग हमेशा विषम संख्या होती है।

   जैसे : $3^2 = 9$, $15^2 = 225$, $29^2 = 841$ इत्यादि।

4. यदि किसी संख्या के अंत में शून्यों की संख्या विषम हो तो वह पूर्ण वर्ग नहीं हो सकता है।

   जैसे : 60, 1000, 400000 इत्यादि।

5. यदि किसी संख्या के अंत में शून्यों की संख्या सम हो तथा शून्यों को छोड़कर शेष संख्या पूर्ण वर्ग हो तो वह पूर्ण वर्ग संख्या होगी।

   जैसे : 4 00, 16 0000, 25000000 इत्यादि।

4	00	16	0000	25	000000
↓	↓	↓	↓	↓	↓
पूर्ण वर्ग संख्या	सम संख्या	पूर्ण वर्ग संख्या	सम संख्या	पूर्ण वर्ग संख्या	सम संख्या

6. यदि किसी संख्या के इकाई स्थान पर 1 या 9 हो तब इसकी वर्ग संख्या के अंत में 1 होगा।

   जैसे :

$1^2 = 1$	$9^2 = 81$
$11^2 = 121$	$19^2 = 361$
$21^2 = 441$	$29^2 = 841$
$31^2 = 961$	$39^2 = 1521$ इत्यादि

© JCERT not to be republished

7. यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 6 हो तो जिस संख्या का वर्ग है, उसका इकाई 4 या 6 होगा।

जैसे : $(6)^2 = 36$, $(14)^2 = 196$, $(16)^2 = 256$, $(24)^2 = 576$ इत्यादि।

8. किसी संख्या के इकाई, दहाई, सैकड़ा आदि के स्थान पर जितने शून्य होते हैं, उसके वर्ग करने पर प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्या में शून्यों की संख्या दो गुनी हो जाती है।

जैसे : 10 $\rightarrow$ संख्या के इकाई स्थान में एक शून्य $\rightarrow$ $10^2 = 100$ $\rightarrow$ प्राप्त संख्या में शून्यों की संख्या दुगुनी

100 $\rightarrow$ संख्या के इकाई, दहाई स्थान में दो शून्य $\rightarrow$ $100^2 = 10000$ $\rightarrow$ प्राप्त संख्या में शून्यों की संख्या दुगुनी

1000 $\rightarrow$ संख्या के इकाई, दहाई, सैकड़ा स्थान में तीन शून्य $\rightarrow$ $1000^2 = 1000000$ $\rightarrow$ प्राप्त संख्या में शून्यों की संख्या दुगुनी

50000 $\rightarrow$ संख्या के इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार स्थान में चार शून्य– $50000^2 = 2500000000$ $\rightarrow$ प्राप्त संख्या में शून्यों की संख्या दुगुनी

उदाहरण 1 : निम्नलिखित में से कौन–कौन सी संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है?

442, 529, 543, 441, 576, 527, 2648, 2601

हल : 442, 543, 527, 2648 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है क्योंकि इनके इकाई स्थान पर क्रमशः 2, 3, 7, 8 अंकित है।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित में से किन–किन वर्ग संख्याओं के इकाई स्थान का अंक 1 होगा?

(*a*) 47^2 (*b*) 49^2 (*c*) 529^2 (*d*) 641^2

(*e*) 487^2 (*f*) 689^2 (*g*) 476^2 (*h*) 21^2

हल : वैसी संख्या जिसके इकाई स्थान पर 1 या 9 हो उस संख्या के वर्ग करने पर प्राप्त संख्या का इकाई अंक 1 होता है। इस आधार पर

(*b*) 49^2 (*c*) 529^2 (*d*) 641^2 (*f*) 689^2

(*h*) 21^2 का इकाई अंक 1 है।

उदाहरण 3 : निम्नलिखित संख्याओं में वर्ग में शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिए–

(*a*) 40 (*b*) 300 (*c*) 5000 (*d*) 60000

© JCERT not to be republished

हल : (*a*) 40^2 में शून्यों की संख्या = दो क्योंकि दी गई संख्या के इकाई स्थान में 1 शून्य है।

(*b*) 300^2 में शून्यों की संख्या = चार क्योंकि दी गई संख्या के इकाई, दहाई, स्थान में 2 शून्य है।

(*c*) 5000^2 में शून्यों की संख्या = 6 क्योंकि दी गई संख्या के इकाई, दहाई, सैकड़ा स्थान में 3 शून्य है।

(*d*) 60000^2 में शून्यों की संख्या = 8 क्योंकि दी गई संख्या के इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार में 4 शून्य है।

उदाहरण 4 : निम्नलिखित वर्ग संख्या के इकाई स्थान के अंको को लिखिए?

(*a*) 524^2 (*b*) 467^2 (*c*) 328^2

हल : (*a*) $524^2 = 524 \times 524 = 2{,}74{,}57\textcircled{6}$ → इकाई अंक 6

(*b*) $467^2 = 467 \times 467$ यहाँ गुणा वाले दोनों संख्याओं के इकाई अंको को गुणा कर वर्ग संख्या के इकाई अंक ज्ञात कर सकते है जैसे

= इकाई अंक × इकाई अंक = 7 × 7 = 4 ⑨ → इकाई अंक

∴ 467^2 का इकाई अंक = 9

(*c*) $328^2 = 328 \times 328$

↓ ↓

इकाई अंक × इकाई अंक = 8 × 8 = 6 ④ → इकाई अंक

∴ 328^2 का इकाई अंक = 4

इन्हें भी जाने :

वर्ग संख्याओं के अंत में शून्य की संख्या सम होती है।

दी हुई दो संख्याओं के बीच की वर्ग संख्या निकलना

दी गई दोनों संख्याओं कि जाँच करेंगे–

(*i*) किस संख्या के वर्ग से दी गई छोटी संख्या बड़ी है।

(*ii*) किस संख्या के वर्ग से दी गई बड़ी संख्या छोटी है।

© JCERT not to be republished

उदाहरण 1 : 45 और 90 के बीच की वर्ग संख्याओं को लिखिए।

हल : यहाँ छोटी संख्या 45 जो 6^2 से बड़ी है।

बड़ी संख्या 90 जो 10^2 से छोटी है।

अर्थात् $45 > 6^2$ और $90 < 10^2$

अतः 45 से 90 के बीच यदि कोई पूर्ण वर्ग संख्या होगी तो वह 6 से बड़ी एवं 10 से छोटी संख्या का वर्ग होगा, यानि 7, 8 तथा 9 का वर्ग होगा।

$\therefore$ $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$

$\therefore$ 45 एवं 90 के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ = 49, 64, 81

उदाहरण 2 : 72 और 130 के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याओं को लिखिए।

हल : $72 > 8^2$ और $130 < 12^2$ $72 < 9^2$ और $130 < 11^2$

$\therefore$ 72 से 130 के बीच वही पूर्ण वर्ग संख्या हो जो 8 से बड़ी एवं 12 से छोटी संख्या के वर्ग होगी।

$\therefore$ $9^2 = 81$, $10^2 = 100$, $11^2 = 121$

अतः 72 से 130 के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ = 81, 100, 121

उदाहरण 3 : 90 और 165 के बीच की पूर्ण संख्याओं को लिखिए।

हल : $\therefore$ $90 > 9^2$ और $165 < 13^2$

$\therefore$ 9 से बड़ी एवं 13 से छोटी संख्या के वर्ग 90 तथा 165 के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ होगी

अतः 90 से 165 के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ = 100, 121, 144

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित में कौन–कौन सी संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है? कारण सहित बताइए।

   (*a*) 222222 (*b*) 24387 (*c*) 2025 (*d*) 4624

   (*e*) 53698 (*f*) 7921 (*g*) 683473 (*h*) 11664

2. निम्नलिखित में कौन–कौन सी संख्या पूर्ण वर्ग संख्या है?

   (*a*) 5928 (*b*) 7569 (*c*) 7692 (*d*) 3481

   (*e*) 2116 (*f*) 4000 (*g*) 36000 (*h*) 360000

© JCERT not to be republished

3. निम्नलिखित में किसका वर्ग सम या विषम संख्या है?

(*a*) 19^2 (*b*) 22^2 (*c*) 137^2 (*d*) 426^2

(*e*) 525^2 (*f*) 143^2

4. निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग की इकाई अंक बताइए–

(*a*) 7 (*b*) 23 (*c*) 132 (*d*) 159

(*e*) 398 (*f*) 326 (*g*) 1237 (*h*) 3225

(*i*) 3000 (*j*) 4304

5. निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग में शून्यों की संख्या बताइए।

(*a*) 20 (*b*) 300 (*c*) 380 (*d*) 4600

(*e*) 52000 (*f*) 350000

6. दी हुई संख्याओं के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(*a*) 54 और 96 (*b*) 109 और 149 (*c*) 135 और 165 (*d*) 148 और 168

(*e*) 142 और 192

रोचक प्रतिरूप

पूर्व के कक्षा में त्रिकोणीय संख्याओं, जिनके बिंदु प्रतिरूप त्रिभुजों के रूप में व्यवस्थित किए जा सकते हैं, के बारे में पढ़ा है।

चित्र

इस प्रतिरूप के अध्ययन से ज्ञात होता है कि–

किन्ही दो क्रमागत त्रिकोणीय संख्याओं को जोड़ने पर एक वर्ग संख्या प्राप्त होती है।

चित्र

जैसे : $1 + 3 = 4 = 2^2$

$3 + 6 = 9 = 3^2$

$6 + 10 = 16 = 4^2$

$10 + 15 = 25 = 5^2$

....

....

© JCERT not to be republished

JEPC Reference Book for Free Distribution : 2022-23

दो क्रमागत वर्ग संख्याओं n^2 एवं $(n + 1)^2$ के बीच $2n$ संख्याएँ है जो पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

या

दो क्रमागत वर्ग संख्याओं के बीच की प्राकृत संख्या जो पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती।

उदाहरण 1 : 5^2 एवं 6^2 के बीच की संख्या जो पूर्ण वर्ग नहीं है।

हल : यहाँ $n = 5$, $n + 1 = 6$

$\therefore$ 5^2 एवं 6^2 के बीच की संख्याओं की संख्या $= 2n = 2 \times 5 = 10$

जो पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

अर्थात् 25 एवं 36 के बीच की संख्याएँ

$= 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 = 10$

उदाहरण 2 : 36 तथा 49 के बीच की संख्याओं को लिखिए जो वर्ग संख्या नहीं है।

हल : $36 = 6^2 = n^2$

$49 = 7^2 = (n + 1)^2$

$\therefore$ n^2 तथा $(n + 1)^2$ के बीच की संख्याओं की संख्या $= 2n$

$\therefore$ 6^2 तथा $(6 + 1)^2$ के बीच की संख्याओं की संख्या $= 2.6 = 12$

अर्थात् 36 तथा 49 के बीच की संख्या = 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48

उदाहरण 3 : निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के बीच कितनी प्राकृत संख्याएँ है। लिखिए–

(*a*) 19 तथा 20 (*b*) 31 तथा 32

(*c*) 17 तथा 18

हल : (*a*) 19^2 तथा 20^2 के बीच की प्राकृत संख्याओं की संख्या $= 2 \times 19 = 38$

क्योंकि n^2 तथा $(n + 1)^2$ के बीच की प्राकृत संख्याओं की संख्या $= 2n$

(*b*) $\therefore$ हम जानते है कि

n^2 तथा $(n + 1)^2$ के बीच की प्राकृत संख्याओं की संख्या $= 2n$

$\therefore$ 31^2 तथा $(31 + 1)^2$ के बीच की प्राकृत संख्याओं की संख्या

$= 2.31 = 62$

© JCERT not to be republished

क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़

1 (प्रथम विषम संख्या) = 1 = 1^2

1+3 (प्रथम दो विषम संख्याओं का योग) = 4 = 2^2

1+3+5 (प्रथम तीन विषम संख्याओं का योग) = 9 = 3^2

1+3+5+7 (प्रथम चार विषम संख्याओं का योग) = 16 = 4^2

1+3+5+7+9 (प्रथम पाँच विषम संख्याओं का योग) = 25 = 5^2

....

....

1+3+5+7+9+.....+n (प्रथम n विषम संख्याओं का योग) = n^2

अर्थात् हम कह सकते है कि

प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2

जहाँ n = विषम संख्याओं की संख्या

क्रमागत सम संख्याओं को जोड़

2 (प्रथम सम संख्या) = 2 = 1^2+1

2+4 (प्रथम दो सम संख्याओं का योग) = 6 = 2^2+2

2+4+6 (प्रथम तीन सम संख्याओं का योग) = 12 = 3^2+3

2+4+6+8 (प्रथम चार सम संख्याओं का योग) = 20 = 4^2+4

2+4+6+8+10 (प्रथम पाँच सम संख्याओं का योग) = 30 = 5^2+5

....

....

2+4+6+8+10+.....+n (प्रथम n सम संख्याओं का योग) = n^2+n

अर्थात् हम कह सकते है कि

प्रथम n सम संख्याओं का योग = n^2+n

जहाँ n = सम संख्याओं की संख्या

© JCERT not to be republished

उदाहरण 1 : प्रथम 8 विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए–

या

1+3+5+7+9+11+13+15 योग संक्रिया किए बिना योगफल ज्ञात कीजिए–

हल : हम जानते है कि

प्रथम n विषम संख्याओं का योग $= n^2$, जहाँ n = विषम संख्याओं की संख्या

$\therefore$ प्रथम 8 विषम संख्याओं का योग $= 8^2 = 8 \times 8 = 64$

या

$1+3+5+7+9+11+13+15 = 64 = 8^2$

उदाहरण 2 : 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21

हल : यहाँ विषम संख्याओं की संख्या = 11

$\therefore$ प्रथम 11 विषम संख्याओं का योग $= 11^2 = 121$

(क्योंकि प्रथम n विषम संख्याओं का योग $= n^2$)

उदाहरण 3 : प्रथम 7 सम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

या

(2+4+6+8+10+12+14) का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते है कि

प्रथम n सम संख्याओं का योगफल $= n^2+n$,

जहाँ n = सम संख्याओं की संख्या

$\therefore$ प्रथम 7 सम संख्याओं का योगफल $= 7^2+7 = 49 + 7 = 56$

किसी भी विषम संख्या के वर्ग को दो क्रमागत घनात्मक पूर्णांकों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

जैसे :

(विषम संख्या)^2	= **विषम संख्या**	= **दो क्रमागत पर्णाकों/प्राकृत संख्याओं का योग**
3^2	= 9	= 4+5
5^2	= 25	= 12+13
7^2	= 49	= 24+25

© JCERT not to be republished

9^2	=	81	=	40+41
11^2	=	121	=	60+61
13^2	=	169	=	84+85

उदाहरण : निम्नलिखित संख्याओं को दो क्रमागत पूर्णांकों के योग के रूप में लिखिए।

(*a*) 25^2 (*b*) 27^2

हल : (*a*) $25^2 = 625 = 312 + 313$

(*b*) $27^2 = 729 = 364 + 365$

दो क्रमागत विषम संख्याओं का गुणनफल उनके बीच की सम संख्या के वर्ग से 1 कम होता है।

जैसे :

1×3 = विषम संख्या 1 तथा 3 के बीच की सम संख्या 2 है।

$\therefore \quad 2^2 - 1 = 3$

11×13 = विषम संख्या 11 तथा 13 के बीच की सम संख्या 12 है।

$\therefore \quad 12^2 - 1 = 144 - 1 = 143$

या

$1 \times 3 = (2 - 1)(2 + 1) = 2^2 - 1 = 3$

$11 \times 13 = (12 - 1)(12 + 1) = 12^2 - 1 = 144 - 1 = 143$

$15 \times 17 = (16 - 1)(16 + 1) = 16^2 - 1 = 256 - 1 = 255$

दो क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल उनके बीच की विषम संख्या के वर्ग से 1 कम होता है।

जैसे :

10×12 = सम संख्या 10 तथा 12 के बीच की विषम संख्या 11 है।

$\therefore \quad 11^2 - 1 = 121 - 1 = 120$

16×18 = सम संख्या 16 तथा 18 के बीच की विषम संख्या 17 है।

$\therefore \quad 17^2 - 1 = 289 - 1 = 288$

या

$10 \times 12 = (11 - 10)(11 + 1) = 11^2 - 1 = 121 - 1 = 120$

© JCERT not to be republished

$16 \times 18 = (17 - 1)(17 + 1) = 17^2 - 1 = 289 - 1 = 288$

$20 \times 22 = (21 - 1)(21 + 1) = 21^2 - 1 = 441 - 1 = 440$

प्रश्नावली 2.2

1. योग संक्रिया किए बिना योगफल ज्ञात कीजिए।

   (*a*) 1+3+5+7+9+11+13+15+17

   (*b*) 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25

   (*c*) 2+4+6+8+10+12

   (*d*) 2+4+6+8+10+12+14+16+18

   (*e*) 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20+22+24+26

2. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गो के बीच कितनी प्राकृत संख्याएँ है? लिखिए।

   (*a*) 47 तथा 48 (*b*) 53 तथा 54 (*c*) 85 तथा 86 (*d*) 92 तथा 93

3. निम्नलिखित संख्याओं को दो क्रमागत पूर्णांकों के योग के रूप मे लिखिए।

   (*a*) 17^2 (*b*) 35^2 (*c*) 27^2 (*d*) 31^2

   (*e*) 39^2 (*f*) 43^2

4. प्रथम 12 विषम संख्याओं का योगफल बिना योग संक्रिया के ज्ञात कीजिए।

5. प्रथम 7 सम संख्याओं का योगफल बिना योग संक्रिया के ज्ञात कीजिए।

संख्याओं के वर्ग ज्ञात करने की कुछ विधियाँ

अभी तक हमने जाना : किसी संख्या का वर्ग निकालने के लिए उस संख्या को उसी से गुणा किया जाता है जैसे :

$3^2 = 3\times3 = 9$ $4^2 = 4\times4 = 16$ $5^2 = 5\times5 = 25$

$8^2 = 8\times8 = 64$ $9^2 = 9\times9 = 81$

परन्तु इस विधि से बड़ी संख्याओं का वर्ग निकालना थोड़ा कठिन है। वर्ग करने की विधियाँ निम्नलिखित है।

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

उदाहरण 1 : गुणा किए बिना निम्नलिखित वर्गो का मान ज्ञात कीजिए।

(*a*) 43^2 (*b*) 54^2 (*c*) 52 (*d*) 68

© JCERT not to be republished

हल : (*a*) $43^2 = (40+3)^2 = 40^2+4\times40\times3+3^2$

$= 1600+240+9 = 1849$

(*b*) $54^2 = (50+4)^2 = 50^2+2\times50\times4+4^2$

$= 2500+400+16 = 2916$

(*c*) $52^2 = (50+2)^2 = 50^2+2\times50\times2+2^2$

$= 2500+200+4 = 2704$

(*d*) $68^2 = (60+8)^2 = 60^2+2.60.8+8^2$

$= 3600+960+64 = 4624$

2. ऐसी संख्या का वर्ग निकालना जिसकी इकाई अंक 5 है। जैसे : 45^2

- सबसे पहले इकाई अंक 5 का वर्ग कीजिए अर्थात् $5^2 = 25$
- अब इकाई को छोड़कर दूसरी संख्या (बाद की संख्या) को उसके परवर्ती संख्या से गुणा कीजिए–

  अर्थात् दूसरी संख्या 4 है जिसके परवर्ती संख्या = 4+1 = 5

  $4 \times 5 = 20$
- अब प्राप्त परिणाम को 25 के बाँई ओर लिखिए।

  अतः 2025

उदाहरण 2 : 185^2 वर्ग कीजिए।

हल : इकाई 5 का वर्ग = 25

इकाई को छोड़कर बाद की संख्या = 18

जिसके परवर्ती संख्या = 18+1 = 19

$18 \times 19 = 342$

अब प्राप्त परिणाम को 25 के बायी ओर लिखने पर

$185^2 = 34225$

3. 50 से 59 तक की संख्या का वर्ग ज्ञात करना। जैसे : 53

- दी गई संख्या के इकाई अंक का वर्ग करके उसे दो अंकीय संख्या के रूप में लिखिए। अर्थात् $(3)^2 = 09$

© JCERT not to be republished

- अब दहाई अंक का वर्ग करके उसमें दी गई संख्या का इकाई अंक जोड़िए

  अर्थात् $(5)^2+3 = 25+3 = 28$

- अब प्राप्त योगफल को बायी ओर लिखिए।

  अर्थात् $53^2 = 2809$

चित्र

उदाहरण 3 : 54^2 ज्ञात कीजिए।

हल : इकाई अंक 4 का वर्ग $= 4^2 = 16$

दहाई अंक 5 का वर्ग + इकाई अंक $= (5)^2+4 = 25+4 = 29$

$\therefore \quad 54^2 = 2916$

4. विकर्ण संधि

चरण (*i*) : पहले यह पता कीजिए कि जिस संख्या का वर्ग निकालना है वह कितने अंकों की संख्या है। माना वह n अंको की संख्या है।

चरण (*ii*) : $n \times n = n^2$ उपवर्ग बनाइए।

चरण (*iii*) : प्रत्येक उपवर्ग का विकर्ण खीचिए।

चरण (*iv*) : दी गई संख्या के अंको को लम्बवत रेखा के ऊपर बाई ओर से लिखिए और क्षैतिज रेखा के बाई ओर से नीचे की ओर लिखिए।

चरण (*v*) : वर्ग के बाई ओर लिखे प्रत्येक अंक को लम्बवत रेखा के ऊपर लिखे अंक से क्रमबद्ध गुणा कीजिए और प्राप्त गुणनफल को उसके सापेक्ष उपवर्ग में इस प्रकार लिखिए कि दहाई अंक विकर्ण के उपर तथा इकाई अंक विकर्ण के नीचे लिखी जाए।

चरण (*vi*) : अब विकर्ण के सारे अंको को जोड़िए और योगफल के इकाई अंक को थोड़ा नीचे जबकि दहाई अंक को थोड़ा उपर लिखिए एवं दहाई अंक के उपर वाले विकर्ण में जोड़ते जाइए।

चरण (*vii*) : प्राप्त परिणाम को बाई ओर से दाई ओर लिखिए। यही वांछित परिणाम होगा।

उदाहरण 4 : विकर्ण विधि से 378 का वर्ग निकालिए।

हल : 378 में अंको की संख्या 3 है।

$\therefore$ उपवर्ग की संख्या $= 3 \times 3 = 3^2 = 9$

© JCERT not to be republished

बायी ओर लम्बवत रेखा के उपर 378 जबकि ऊपर में क्षैतिज रूप में 378 लिखिए। अब क्रमबद्ध गुणा कीजिए।

चित्र

$\therefore \quad 378^2 = 142884$

5. **तीन वर्गो का योग एक वर्ग के रूप में :** (एक प्राकृत संख्या)^2 + (ठीक अगली प्राकृत संख्या)^2 + (दोनो का गुणनफल)^2 + (तीसरी संख्या+1)^2

उदाहरण : $1^2+2^2+(2)^2 = (2+1)^2 = 3^2$

$2^2+3^2+6^2 = (6+1)^2 = 7^2$

$3^2+4^2+12^2 = (12+1)^2 = 13^2$

$4^2+5^2+20^2 = (20+1)^2 = 21^2$

....

....

$n^2+(n^2+1)^2+[n.(n^2+1)^2+1]^2 = [n(n+1)+1]^2 = [n(n+1)+1]^2$

6. **संख्याओं के कुछ रोचक प्रतिरूप :**

(*a*) संख्याओं के वर्गो का अवलोकन कीजिए।

1, 11, 111, 1111, ... इत्यादि।

$1^2 = 1$

$11^2 = 1\ 2\ 1$

$111^2 = 1\ 2\ 3\ 2\ 1$

$1111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1$

$11111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$

$111111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$

$1111111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$

उपरोक्त प्रतिरूप का उपयोग करते हुए निम्नलिखित संख्याओं का वर्ग संख्या लिखिए।

(*i*) 1111111^2 (*ii*) 11111111^2

(*b*) $7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

© JCERT not to be republished

$6667^2 = 44448889$

$66667^2 = 4444488889$

$666667^2 = 444444888889$

अभ्यास

उपरोक्त प्रतिरूप का उपयोग करते हुए निम्न संख्याओं के वर्ग संख्या लिखिए।

1. 6666667^2 2. 66666667^2

पाइथागोरस त्रिक (Pythagoras Triplet)

a, b तथा c तीन ऐसी संख्याएँ है जिसमें $a^2+b^2 = c^2$ तब

a, b और c समूह पाइथागोरस त्रिक कहलाते है। जैसे–

- 3, 4 तथा 5 के लिए $3^2 + 4^2 = 5^2$ अतः 3, 4 तथा 5 पाइथागोरस त्रिक है।
- 6, 8 तथा 10 के लिए or $9 + 16 = 25$ or $25 = 25$

$6^2 + 8^2 = 10^2$

or $36 + 64 = 100$ अतः 6, 8 तथा 10 पाइथागोरस त्रिक है।

or $100 = 100$

पाइथागोरस त्रिक का सामान्य : रूप (General Form)

किसी प्राकृत संख्या $M > 1$ के लिए हम पाते है कि

$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$ अतः

$2m$, $m^2 - 1$ और $m^2 + 1$ पाइथागोरस त्रिक के रूप में है।

उदाहरण : एक पाइथागोरस त्रिक ज्ञात कीजिए जिसकी एक संख्या 12 है।

हल : यदि हम लेते है, $M^2 - 1 = 12$

तब $M^2 = 12 + 1 = 13$

यहाँ M का मान पूर्णांक नहीं होगा।

फिर यदि हम लेते है, $M^2 + 1 = 12$

तब $M^2 = 12 - 1 = 11$

इसमें भी M का मान एक पूर्णांक नहीं होगा।

© JCERT not to be republished

अंत में $2M = 12$ लेते है।0

तब $M = \frac{12}{2} = 6$

यहाँ M का मान पूर्णांक आया।

अतः पाइथागोरस त्रिक होगा,

$2M = 2 \times 6 = 12$

$M^2 - 1 = 6^2 - 1 = 36 - 1 = 35$

$M^2 + 1 = 6^2 + 1 = 36 + 1 = 37$

अतः 12, 35 तथा 37 पाइथागोरस त्रिक है।

उदाहरण : एक पाइथागोरस त्रिक लिखिए, जिसकी सबसे छोटी संख्या 8 है।

हल : साधारण रूप $2M, M^2 - 1, M^2 + 1$ से हम पाइथागोरस त्रिक पा सकते है।

यहाँ, पहले हम लेते है $M^2 - 1 = 8$

या $M^2 = 8 + 1 = 9$

या, $M = 3$

तब $2M = 2 \times 3 = 6$

$M^2 + 1 = 3^2 + 1 = 10$

अतः 6, 8, 10 एक पाइथागोरस त्रिक है लेकिन इसमें 8 सबसे छोटी संख्या नहीं है।

अब हम लेते है : $2M = 8$

या $M = \frac{8}{2} = 4$

तब $M^2 - 1 = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15$

$M^2 + 1 = 4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

अतः 8, 15, 17 एक ऐसा पाइथागोरस त्रिक है जहाँ 8 सबसे छोटी संख्या है।

नोट : शिक्षक बच्चों को बताएँगे कि पाइथागोरस त्रिक के लिए दी गई संख्या को $2M$, $M^2 - 1$ तथा $M^2 + 1$ में से उसी के बराबर मानेगे जिसका हल एक पूर्णांक आने की सम्भावना हो।

© JCERT not to be republished

प्रश्नावली 2.3

1. गुणा किए बिना निम्नलिखित वर्गों का मान ज्ञात कीजिए।

(*a*) 23^2 (*b*) 35^2 (*c*) 48^2 (*d*) 56^2

(*e*) 63^2 (*f*) 72^2 (*g*) 84^2 (*h*) 94^2

2. विकर्ण तरीका का उपयोग करके निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों का मान ज्ञात कीजिए।

(*a*) 238^2 (*b*) 784^2 (*c*) 689^2 (*d*) 579^2

(*e*) 868^2 (*f*) 937^2 (*g*) 673^2

3. गुणा किए बिना 50 से 59 तक की संख्याओं के वर्ग निकालने की विधि से निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(*a*) 53^2 (*b*) 58^2 (*c*) 54^2 (*d*) 57^2

(*e*) 55^2

4. वर्गों के रूचिकर प्रारूप के गुण के आधार पर निम्नलिखित रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(*a*) $(11111)^2$ = ... (*b*) $(1111111)^2$ = ...

(*c*) $(666667)^2$ = ... (*d*) $5^2 + 6^2 + 30^2$ = ...^{2}

(*e*) $8^2 + 9^2 + 72^2$ = ...^{2} (*f*) $3^2 + 4^2 + 12^2$ = ...^{2}

(*g*) $1234321 = \dfrac{(\ldots\ldots\ldots\ldots)^2}{1+2+\ldots\ldots+2+1}$

(*h*) $1234321 = \dfrac{(\ldots\ldots\ldots\ldots)^2}{1+2+3+4+5+\ldots\ldots+5+4+3+2+1}$

5. पाइथागोरस त्रिक लिखिए जिसका 1 सदस्य है।

(*a*) 6 (*b*) 14 (*c*) 16 (*d*) 18

6. एक पाइथागोरस त्रिक ज्ञात कीजिए जिसमें सबसे छोटी संख्या 10 है।

संकेत (Hint) :

(1) (9) $23 = (20+3) = 20^2+2.20.3+3^2$ सूत्र $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग करे

$= 400+120+9 = 529$

(4) (8) $1234321 = \dfrac{(4444)^2}{1+2+3+4+3+2+1}$

© JCERT not to be republished

इस प्रकार की संख्या में $\frac{\text{सबसे बड़े अंक की पुनरावृति}}{\text{बड़े अंक तक बढ़ते क्रम में योग फिर घटते क्रम में योग}}$

7. निम्नलिखित त्रिक में पाइथागोरस त्रिक पहचानिए।

(*i*) (5, 12, 13) (*ii*) (4, 5, 7) (*iii*) 12, 13, 17 (*d*) 12, 35, 37

(*e*) (15, 20, 25)

वर्गमूल (Square Root)

अभी तक हमने किसी संख्या का वर्ग निकालने के बारे में समझा कि–

किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल उस संख्या का वर्ग कहलाता है जैसे–

$1 \times 1 = 1$ यहाँ 1 का वर्ग $= 1^2$

$2 \times 2 = 4$ यहाँ 2 का वर्ग $= 2^2$

$3 \times 3 = 9$ यहाँ 3 का वर्ग $= 3^2$ इत्यादि।

$\therefore$ $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ इत्यादि।

$\therefore$ 1, 4, 9 इत्यादि के वर्गमूल क्रमशः 1, 2, 3 इत्यादि हुए।

अतः

(*i*) किसी दी हुई प्राकृत संख्या n का वर्गमूल वह प्राकृत संख्या m है जिसका वर्ग करने पर दी हुई संख्या n प्राप्त होती है। अर्थात् $\sqrt{n} = m$ या $n = m^2$

(*ii*) वर्गमूल $= n$ का वर्गमूल $= \sqrt{n} = (n)^{½}$

अर्थात् वर्गमूल का चिन्ह $= \sqrt{\ }$, या किसी संख्या

का घात $\frac{1}{2}$ होने का संकेत

(*iii*) वर्गमूल, वर्ग की एक प्रतिलोम क्रिया है।

(*iv*) जिन संख्याओं का वर्गमूल पूरा–पूरा निकलता है। उसे पूर्ण वर्ग–संख्या कहते है।

(*v*) यदि $n = m^2$ तो $\sqrt{n} = m^2 \times \frac{1}{2}$

(*vi*) $\sqrt{m \times n} = \sqrt{m} \times \sqrt{n}$

© JCERT not to be republished

इन्हें याद रखे :

(*i*) किसी भी पूर्ण वर्ग संख्या के दो वर्गमूल होते है, एक घनात्मक और दूसरा ऋणात्मक

जैसे $4 = 2^2$ साथ ही $4 = (-2)^2$

$\therefore$ 4 के दो वर्गमूल 2 तथा –2

अर्थात् 4 के वर्गमूल को ± 2 द्वारा प्रकट किया जाता है।

– अंकगणित के प्रश्नों में वर्गमूल के ऋणात्मक मान का प्रयोग नहीं किया जाता है।

– इस अध्याय में हम लोग किसी प्राकृत संख्या के केवल घनात्मक वर्गमूल ही लेंगे।

(*ii*) प्रत्येक पूर्ण वर्ग सम संख्या का वर्गमूल एक सम संख्या होता है। जैसे :

$\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{36} = 6$ इत्यादि।

(*iii*) प्रत्येक पूर्ण वर्ग विषम संख्या का वर्गमूल एक विषम संख्या होती है। जैसे–

$\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{49} = 7$ इत्यादि।

(*iv*) यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या के अंत में शून्य की संख्या सम हो, तो उस संख्या का वर्गमूल पूरा–पूरा ज्ञात हो जाता है। जैसे–

400	160000	25000000
↓	↓	↓
सम संख्या	सम संख्या	सम संख्या

© JCERT not to be republished

वर्गमूल निकालने की विधियाँ

1. बार–बार घटाने की विधि :

जैसे–

(*i*) 25 का वर्गमूल बार–बार घटाने की विधि से निकालना :

$$25 - 1 = 24$$
$$24 - 3 = 21$$
$$21 - 5 = 16$$
$$16 - 7 = 9$$
$$9 - 9 = 0$$

बार–बार क्रमागत विषम संख्याओं को घटाने पर 5वीं बार में 0 शून्य आया

$\therefore$ 25 का वर्गमूल $= 5$

(*ii*) 9 का वर्गमूल बार–बार घटाने की विधि से निकालना :

$$9 - 1 = 8$$

$$8 - 3 = 5$$

$$5 - 5 = 0$$

बार–बार क्रमागत विषम संख्याओं को घटाने पर तीसरी बार में 0 शून्य आया

$\therefore$ 9 का वर्गमूल = 3

(*iii*) 49 का वर्गमूल बार–बार घटाने की विधि से निकालना :

$$49 - 1 = 48$$

$$48 - 3 = 45$$

$$45 - 5 = 40$$

$$40 - 7 = 33$$

$$33 - 9 = 24$$

$$24 - 11 = 13$$

$$13 - 13 = 0$$

बार–बार क्रमागत विषम संख्याओं को घटाने पर 7वीं बार में 0 शून्य आया

$\therefore$ 49 का वर्गमूल = 7

(*iv*) 121 का वर्गमूल बार–बार घटाने की विधि से निकालना :

$$121 - 1 = 120$$

$$120 - 3 = 117$$

$$117 - 5 = 112$$

$$112 - 7 = 105$$

$$105 - 9 = 96$$

$$96 - 11 = 85$$

$$85 - 13 = 72$$

$$72 - 15 = 57$$

$$57 - 17 = 40$$

$$40 - 19 = 21$$

$$21 - 21 = 0$$

© JCERT not to be republished

बार–बार क्रमागत विषम संख्याओं को घटाने पर 11वीं बार में 0 शून्य आया

∴ 121 का वर्गमूल = 11

नोट : इस विधि से बड़ी वर्ग संख्या का वर्गमूल निकालना एक कठिन एवं लम्बी प्रक्रिया है।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 2.1 :

1. पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं है।

   (*a*), (*b*), (*e*), (*g*)

2. पूर्ण वर्ग संख्याएँ है।

   (*b*), (*d*), (*e*), (*h*)

3. सम = (*b*), (*d*)

   विषम = (*a*), (*c*), (*e*), (*f*)

4. (*a*) 9 (*b*) 9 (*c*) 4 (*d*) 1

   (*e*) 4 (*f*) 6 (*g*) 9 (*h*) 5

   (*i*) 0 (*j*) 6

5. (*a*) दो (*b*) चार (*c*) दो (*d*) चार

   (*e*) छः (*f*) आठ

6. (*a*) 64, 81 (*b*) 121, 144 (*c*) 144

   (*d*) कोई नहीं, क्योंकि 12 तथा 13 के बीच कोई प्राकृत/पूर्ण संख्या नहीं है।

   (*e*) 144, 169

प्रश्नावली 2.2

1. (*a*) $9^2 = 81$ (*b*) $13^2 = 169$ (*c*) $6^2+6 = 42$ (*d*) $9^2+9 = 90$

   (*e*) $13^2+13 = 182$

2. (*a*) $2n = 2\times47 = 94$ (*b*) $2n = 2\times53 = 106$

   (*c*) $2n = 2\times85 = 170$ (*d*) $2n = 2\times92 = 184$

3. (*a*) $17^2 = 289 = 144+145$ (*b*) $35^2 = 1225 = 612+613$

   (*c*) $27^2 = 729 = 364+365$ (*d*) $31^2 = 961 = 330+331$

   (*e*) $39^2 = 1521 = 760+761$ (*f*) $43^2 = 1849 = 924+925$

© JCERT not to be republished

4. $n^2 = 12^2 = 144$

5. $n^2+n = 7^2+7 = 56$

प्रश्नावली 2.3

1. (*a*) 529 (*b*) 1225 (*c*) 2304 (*d*) 3136
   (*e*) 3969 (*f*) 5184 (*g*) 7056 (*h*) 8836
2. (*a*) 56,664 (*b*) 6,14,656 (*c*) 4,74,721 (*d*) 3,35,241
   (*e*) 7,53,424 (*f*) 8,77,969 (*g*) 4,52,929
3. (*a*) 2809 (*b*) 3364 (*c*) 2916 (*d*) 3249
   (*e*) 3025
4. (*a*) 123454321 (*b*) 12 34567654321
   (*c*) 444444888889 (*d*) $(31)^2$
   (*e*) $(73)^2$ (*f*) $(13)^2$
   (*g*) $\dfrac{(4444)^2}{1+2+3+4+3+2+1}$ (*h*) $\dfrac{4444444}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}$
   (*i*) $(12)^2$ (*j*) $(11)^2$
5. (*a*) 6, 8 और 10 (*b*) 14, 48 और 50 (*c*) 16, 63 और 65 (*d*) 18, 80 और 82
6. 10, 24, 26
7. (*i*), (*iv*), (*v*) पाइथागोरस त्रिक है।
   (*ii*) तथा (*iii*) पाइथागोरस त्रिक नहीं है।

वर्गमूल (Square Root)

अभी तक हमने किसी संख्या का वर्ग निकालने के बारे में समझा कि–

किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल उस संख्या का वर्ग कहलाता है जैसे–

$1 \times 1 = 1$ यहाँ 1 का वर्ग $= 1^2$

$2 \times 2 = 4$ यहाँ 2 का वर्ग $= 2^2$

$3 \times 3 = 9$ यहाँ 3 का वर्ग $= 3^2$ इत्यादि

$\therefore\ 1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9$ इत्यादि

© JCERT not to be republished

$\therefore$ 1, 4, 9 इत्यादि के वर्गमूल क्रमशः 1, 2, 3 इत्यादि हुए।

अतः

(*i*) किसी दी हुई प्राकृत संख्या n का वर्गमूल वह प्राकृत संख्या m है जिसका वर्ग करने पर दी हुई संख्या n प्राप्त होती है। अर्थात् $\sqrt{n} = m$ या $n = m^2$

(*ii*) वर्गमूल = n का वर्गमूल = $\sqrt{n} = (n)^{\frac{1}{2}}$ अर्थात् वर्गमूल का चिन्ह = $\sqrt{\ }$, या किसी संख्या का घात $\frac{1}{2}$ होने का संकेत

(*iii*) वर्गमूल, वर्ग की एक प्रतिलोम क्रिया है।

(*iv*) जिन संख्याओं का वर्गमूल पूरा–पूरा निकलता है, उसे पूर्ण वर्ग संख्या कहते हैं।

(*v*) यदि $n = m^2$ तो $\sqrt{n} = m$

(*vi*) $\sqrt{m \times n} = \sqrt{m} \times \sqrt{n}$

इन्हें याद रखें –

1. किसी भी पूर्ण संख्या के दो वर्गमूल होते हैं, एक धनात्मक और दूसरा ऋणात्मक

   जैसे– $4 = 2^2$ साथ ही $4 = (-2)^2$

   $\therefore$ 4 के दो वर्गमूल 2 तथा –2

   अर्थात् 4 के वर्गमूल को ± द्वारा प्रकट किया जाता है।

   अंकगणित के प्रश्नों में वर्गमूल के ऋणात्मक मान का प्रयोग नहीं किया जाता है।

   इस अध्याय में हम लोग किसी प्राकृत संख्या के केवल धनात्मक वर्गमूल ही लेंगे।

2. प्रत्येक पूर्ण वर्ग सम संख्या का वर्गमूल एक सम सख्या होता है। जैसे–

   $\sqrt{4} = 2,\ \sqrt{16} = 4,\ \sqrt{64} = 8,\ \sqrt{36} = 6$ इत्यादि

3. प्रत्यक पूर्ण वर्ग विषम संख्या का वर्गमूल एक विषम संख्या होता है जैसे–

   $\sqrt{9} = 3,\ \sqrt{25} = 5,\ \sqrt{49} = 7$ इत्यादि

4. यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या के अंत में शून्यों की संख्या सम हो, तो उस संख्या का वर्गमूल पूरा–पूरा सात हो जाता है जैसे–

$9\underline{00}$	$16\underline{000}$	$25\underline{000000}$
↓	↓	↓
सम संख्या	सम संख्या	सम संख्या

© JCERT not to be republished

वर्गमूल निकालने की विधियाँ

1. बार–बार घटाने की विधि

जैसे–1. 25 का वर्गमूल बार–बार घटाने की विधि से निकालना

$$25 - 1 = 24$$
$$24 - 3 = 21$$
$$21 - 5 = 16$$
$$16 - 7 = 9$$
$$9 - 9 = 0$$

बार–बार क्रमागत विषम संख्याओं को घटाने पर 5वीं बार में 0 आया

$\therefore$ 25 का वर्गमूल = 5

2. 9 का वर्गमूल बार–बार घटाने की विधि से निकालना

$$9 - 1 = 8$$
$$8 - 3 = 5$$
$$5 - 5 = 0$$

बार–बार क्रमागत विषम संख्याओं को घटाने पर तीसरी बार में शून्य आया।

$\therefore$ 9 का वर्गमूल = 3

2. 49 का वर्गमूल बार–बार घटाने की विधि से निकालना

$$49 - 1 = 48$$
$$48 - 3 = 45$$
$$45 - 5 = 40$$
$$40 - 7 = 33$$
$$33 - 9 = 24$$
$$24 - 11 = 13$$
$$13 - 13 = 0$$

बार–बार क्रमागत विषम संख्याओं को घटाने पर 7वीं बार में शून्य आया

$\therefore$ 49 का वर्गमूल = 7

© JCERT not to be republished

4. 121 का वर्गमूल बार–बार घटाने की विधि से निकालना

$$121 - 1 = 120$$
$$120 - 3 = 117$$
$$117 - 5 = 112$$
$$112 - 7 = 105$$
$$105 - 9 = 96$$
$$96 - 11 = 85$$
$$85 - 13 = 72$$
$$72 - 15 = 57$$
$$57 - 17 = 40$$
$$40 - 19 = 21$$
$$21 - 21 = 0$$

बार–बार क्रमागत विषम संख्याओं को घटाने पर 11वीं बार में शून्य आया

$\therefore$ 121 का वर्गमूल = 11

नोट– इस विधि से बड़ी वर्ग संख्या का वर्गमूल निकालना एक कठिन एवं लंबी प्रक्रिया है।

2. अभाज्य गुणनखण्ड के द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना –

हमने पिछली कक्षाओं में अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा दी हुई संख्या का ल.स. निकालना सीखा है।

उदाहरण – (i) 324 का वर्गमूल अभाज्य गुणनखण्ड विधि से निकालना

हल–

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

अब 324 के 7 अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखते हैं।

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

© JCERT not to be republished

अब, अभाज्य गुणनखण्ड से प्राप्त संख्याओं का जोड़ा बनाते हैं।

$$324 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}$$

$\therefore$ $324 = 2 \times 3 \times 3$ (यहाँ प्रत्येक जोड़े से एक–एक संख्या लेते हैं फिर उसे गुणा करते हैं और प्राप्त गुणनफल दी हुई संख्या का वर्गमूल होता है।

$\therefore$ $\sqrt{324} = 18$

अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा वर्गमूल निकालने के चरण

चरण 1: जिस संख्या का वर्गमूल निकालना है उसे अभाज्य गुणनखण्ड के रूप में लिखेंगे।

चरण 2: प्राप्त अभाज्य गुणनखण्ड को गुणनफल के रूप में लिखेंगे।

चरण 3: प्राप्त अभाज्य गुणनखण्डों को 2–2 का जोड़ा बनाएंगे।

चरण 4: जोड़ा बनाए गए अभाज्य गुणनखण्डों में से एक–एक संख्या को लेकर गुणा करेंगे और प्राप्त गुणनफल ही दी गई संख्या का वर्गमूल होगा।

उदाहरण 2. 84 का वर्गमूल अभाज्य गुणनखण्ड विधि से निकालें।

हल–

2	84
2	42
3	21
	7

$\therefore$ $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

$= 2^2 \times 3 \times 7$

$\therefore$ यहाँ 3 तथा 7 का जोड़ा नहीं प्राप्त हुआ

$\therefore$ 84 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

$\therefore$ 84 का वर्गमूल एक पूर्ण संख्या के रूप में नहीं प्राप्त होगा।

यहाँ 84 के प्राप्त अभाज्य गुणनखण्ड $(2 \times 2 \times 3 \times 7)$ को पूर्णतः जोड़ा बनाने के लिए यदि 3×7 अर्थात् 21 से गुणा करना पड़ेगा तब

$$84 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 3 \times 7$$

या, $1764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$

या $1764 = 2 \times 3 \times 7$

या $1764 = 42$

© JCERT not to be republished

यहाँ 84 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं था उसमें छोटी संख्या 21 से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल 1764 एक पूर्ण वर्ग संख्या हुआ जिसका वर्गमूल 42 आया।

नोट– यदि किसी संख्या को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए सबसे छोटी संख्या ज्ञात करना हो तो

- उस दी गई संख्या का अभाज्य गुणनखण्ड निकालेंगे।
- फिर देखेंगे कि किस अभाज्य गुणनखण्ड का जोड़ा (pair) नहीं बना।
- जिस अभाज्य संख्या का जोड़ा (pair) नहीं बना तो उसी अभाज्य संख्या से (गुणा या भाग) करेंगे तब वही अभाज्य संख्या सबसे छोटी संख्या होगी जो किसी दी गई संख्या को पूर्ण वर्ग बनायेगी।

उदाहरण–3.

1458 =

2	1458
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$\therefore \quad 1458 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

यहाँ अभाज्य–गुणनखण्ड में 2 का जोड़ा (pair) नहीं मिला तब 2 का जोड़ा (pair) बनाने के लिए 2 से (गुणा या भाग) करना होगा तब वही 2 सबसे छोटी संख्या होगी जिससे 1458 में गुणा करेंगे एवं प्राप्त गुणनफल 2916 एक पूर्ण वर्ग संख्या होगी

$\therefore \quad 1458 \times 2 = 2916$

अतः 1458 का सबसे छोटा गुणज 2916 होगा जो एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

$$\therefore \quad \sqrt{2916} = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}$$

$$= 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= 54$$

उदाहरण–4. वह छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 9408 को भाग देने से प्राप्त भागफल एक पूर्ण वर्ग संख्या हो जाए तथा भागफल का वर्गमूल निकालिए।

हल–

9408 =

2	9408

© JCERT not to be republished

हल–

9408 =

2	9408
2	4704
2	2352
2	1176
2	588
2	294
7	147
3	21
7	1
	1

$\therefore \quad 9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7} \times 3$

9408 के अभाज्य गुणनखण्ड में 347 युग्म (Pair) नहीं है

अतः 9408 को 3 से विभाजित करने पर $9408 \div 3 = 3136$

$\therefore \quad 3136 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 7$

$\therefore$ 3136 का वर्गमूल = 56

उदाहरण–5. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो प्रत्येक संख्या 8, 12, 15 तथा 20 से विभाजित हो जाए।

हलः

चरण 1: सबसे पहले वह छोटी संख्या निकालिए जो दी गई प्रत्येक संख्या से विभाजित हो इसके लिए दी गई संख्या का ल.स. निकालना होगा।

चरण 2: प्राप्त ल.स. का अभाज्य गुणनखण्ड निकालिए एवं जाँच कीजिए कि प्रत्येक अभाज्य संख्या का युग्म (Pair) बना है या नही।

चरण 3: यदि युग्म नहीं बना तब उसी अभाज्य संख्या से ल.स. में गुणा या भाग करके उसे पूर्ण वर्ग संख्या बनाएंगे जो अभीष्ट उत्तर होगा।

हल– 8, 12, 15, 20 का ल.स.

2	8, 12, 15, 20
2	4, 6, 15, 10
3	2, 3, 15, 5
5	2, 1, 5, 5
	2, 1, 1, 1

© JCERT not to be republished

$= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2$

$= 120$

अब 120 का अभाज्य गुणनखण्ड

2	120
2	60
2	30
3	15
	5

$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

यहाँ, 2, 3 तथा 5 का युग्म (Pair) नहीं आया अतः 120 में 2, 3, 5 से गुणा करना होगा तभी एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त होगी।

$\therefore$ वर्ग संख्या $= 120 \times 2 \times 3 \times 5$

$= 120 \times 30 = 3600$

उदाहरण 6: एक विद्यालय में कक्षा VIII के सभी विद्यार्थियों ने प्रधानमंत्री कोष में रुपए 1764 दान में दिए। प्रत्येक विद्यार्थियों ने उतने ही रुपये दान में दिए जितने कक्षा में विद्यार्थी थे तो कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या $= x$

$\therefore$ कोष में जमा की की गई राशि $= x \times x = x^2$

या, $1764 = x^2$

$\therefore$ $x = \sqrt{1764} = \sqrt{2 \times 2 \times 21 \times 21} = 2 \times 21 = 42$

$\therefore$ विद्यार्थियों की संख्या $= 42$

उदाहरण 7: एक आयत का क्षेत्रफल 1764 cm^2 यदि आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई की चार गुनी है तो आयत की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना आयत की चौड़ाई $= x$

$\therefore$ लम्बाई $= 4, x = 4x$

अब आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

या, $1764 = 4x \times x$

$\therefore$ $4x^2 = 1764$

© JCERT not to be republished

∴ $x^2 = \frac{1764}{4}$

या $x^2 = 441$

∴ $x = \sqrt{441} = \sqrt{21 \times 21} = 21$

∴ आयत की लम्बाई $= 4x = 4 \times 21 = 84$ cm

चौड़ाई $= x = 21$ cm

उदाहरण 8: दो संख्याओं का गुणनफल 1792 है। यदि एक संख्या दूसरी संख्या से सात गुणी है तो दोनों संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना एक संख्या $= x$ है

दूसरी संख्या $= 7x$

∴ दोनों का गुणनफल $= x \times 7x$

या, $1792 = 7x^2$

या, $x^2 = \frac{1792}{7}$

या, $x^2 = 256$

या, $x = \sqrt{256} = \sqrt{16 \times 16} = 16$

∴ एक संख्या $= x = 16$

दूसरी संख्या $= 7x = 7 \times 16 = 112$

© JCERT not to be republished

प्रश्नावली–2.4

1. बार–बार घटाने की विधि से निम्नलिखित का वर्गमूल निकालिए।

   (*a*) 25 (*b*) 49 (*c*) 121 (*d*) 9

2. अभाज्य गुणनखण्ड विधि से निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल निकालिए।

   (*a*) 144 (*b*) 256 (*c*) 784 (*d*) 900

   (*e*) 1444 (*f*) 3136 (*g*) 4761 (*h*) 7921

   (*i*) 6724 (*j*) 9216

3. निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक के लिए वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे इस संख्या को गुणा करने पर यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

(*a*) 700 (*b*) 147 (*c*) 84 (*d*) 1620

(*e*) 1100

4. निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक के लिए वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे इस संख्या को भाग देने पर वह एक पूर्ण वर्ग बन जाए। ज्ञात की गई संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

(*a*) 9408 (*b*) 3645 (*c*) 2925 (*d*) 2800

(*e*) 396

5. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रत्येक संख्या से विभाजित हो।

(*a*) 6, 9, 15 (*b*) 6, 9, 15, 40 (*c*) 4, 9, 10

6. किसी विद्यालय में कक्षा VIII के विद्यार्थियों ने प्रधानमंत्री सहायता कोष में रुपए 7056 जमा किए। प्रत्येक विद्यार्थी ने उतने ही रुपए दान में दिए जितने कक्षा में विद्यार्थी थे। कक्षा में विद्यार्थी थे। कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. एक आयत का क्षेत्रफल 3920 वर्ग मीटर है। यदि आयत की लम्बाई इसकी चौड़ाई की पाँच गुनी है तो आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

8. एक आयत की चौड़ाई उसकी लम्बाई की तीन गुनी है। यदि आयत का क्षेत्रफल 1323 cm^2 है तो आयत की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

9. वह कौन–सी सबसे छोटी वर्ग संख्या है जो 10, 15 तथा 25 से पूर्ण रूप से विभाजित होती है।

10. किसी बाग में 1296 पेड़े हैं। प्रत्येक पंक्ति में पेड़ों की संख्या उतनी ही है जितनी पंक्तियाँ हैं तो पंक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

1. (*a*) 5 (*b*) 7 (*c*) 11 (*d*) 3

2. (*a*) 12 (*b*) 16 (*c*) 28 (*d*) 30
(*e*) 38 (*f*) 56 (*g*) 69 (*h*) 89
(*i*) 82 (*j*) 96

3. (*a*) सबसे छोटी संख्या = 7 वर्गमूल = 70

(*b*) सबसे छोटी संख्या = 3 वर्गमूल = 21

© JCERT not to be republished

(*c*) सबसे छोटी संख्या = 21 वर्गमूल = 42

(*d*) सबसे छोटी संख्या = 5 वर्गमूल = 90

(*e*) सबसे छोटी संख्या = 11 वर्गमूल = 110

4. (*a*) सबसे छोटी संख्या = 3 वर्गमूल = 56

(*b*) सबसे छोटी संख्या = 5 वर्गमूल = 27

(*c*) सबसे छोटी संख्या = 13 वर्गमूल = 15

(*d*) सबसे छोटी संख्या = 7 वर्गमूल = 20

(*e*) सबसे छोटी संख्या = 11 वर्गमूल = 6

5. (*a*) 900 (*b*) 3600 (*c*) 900

6. 84

7. लम्बाई = 140 मीटर चौड़ाई = 28 मीटर

8. लम्बाई = 21 cm चौड़ाई = 63 cm

9. 900

10. 36

भागफल विधि से वर्गमूल निकालना

पूर्व में अध्ययन किए गए दो विधि–

1. बार–बार घटाने की विधि
2. गुणनखण्ड विधि

द्वारा बड़ी संख्या का वर्गमूल निकालना एवं लंबी एवं कठिन प्रक्रिया है। इसलिए अब हम लोग दीर्घ विभाजन विधि से वर्गमूल निकालना सीखेंगे। जिसका चरण (Steps) निम्नलिखित हैं।

चरण 1: दी गई संख्या के इकाई स्थान से (अर्थात् दाँए से बाँए) दो–दो संख्याओं के माथे पर बार (–) लगाकर युग्म (Pair) बनाइए। यदि अंकों की संख्या विषम है तो बाँयी ओर सबसे अंत में एक अंक पर बार (–) लगाइए। यदि अंकों की संख्या सम है तो अंकों का पूरा–पूरा युग्म (Pair) लग जाएगा।

चरण 2: अब बाँए से पहले युग्म (Pair) को देखकर सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिसका वर्ग उस पहले युग्म से कम या बराबर हो।

© JCERT not to be republished

उस संख्या को भाजक, भागफल एवं भाजक के नीचे रखिए साथ ही इन दोनों के गुणनफल को पहले युग्म (Pair) के नीचे रखकर घटाइए एवं शेषफल प्राप्त कीजिए।

चरण 3: अगले बार (–) से बने युग्म वाली संख्या को शेषफल के दाँए लिखिए जो नया भाज्य होगा।

चरण 4: भाजक एवं उसके नीचे लिखी गई संख्या को जोड़िए एवं दाँए में खाली स्थान के साथ लिखिए जो नया भाजक होगा।

चरण 5: अब अनुमान लगाइए कि नए भाजक के दाहिनी ओर बड़े से बड़े किसी अंक को लिखकर प्राप्त राशि को उसी बड़े से बड़े अंक से गुणा कर गुणनफल को नए भाज्य के नीचे रखकर घटाइए एवं शेषफल प्राप्त कीजिए। उस बड़े अंक को भाज्य के नीचे एवं भागफल के स्थान पर भी लिखिए। इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक कि शेषफल (0) नहीं हो जाए।

चरण 6: अंत में जाँच कीजिए कि भागफल के दो गुना भाजक के स्थान पर आया या नहीं। यदि भाजक के स्थान पर अंतिम भागफल का दो गुना तथा अंतिम भागफल को अंतिम भागफल से गुणा करने पर वर्गमूल वाली संख्या प्राप्त हो जाए तो निकाला गया वर्गमूल सही है।

उदाहरण 1. 12544 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल– चरण–(i)

$$\overline{1}\;\overline{25}\;\overline{44}$$

चरण– 2 एवं 3. एवं 4

भाजक	भाज्य	भागफल
1	$\overline{1}\;\overline{25}\;\overline{44}$	1
1	–1	
2	025	

चरण–5

भाजक	भाज्य	भागफल
1	$\overline{1}\;\overline{25}\;\overline{44}$	112
1	1	

© JCERT not to be republished

21	025	
1	–21	
222	444	
2	444	
224	000	
भागफल का दो गुणा		

चरण– 4 अंतिम भाजक = 224 (अंतिम भागफल का दो गुना)

अंतिम भागफल = 112

साथ ही अंतिम भागफल × अंतिम भागफल = वर्गमूल वाली संख्या

अर्थात् 112 × 112 = 12544

उदाहरण 2. 15129 का वर्गमूल भागफल विधि से ज्ञात कीजिए।

हल–

भाजक	भाज्य	भागफल
1	$\overline{1}\ \overline{51}\ \overline{29}$	123
1	–1	
22	051	
2	–44	
243	0729	
3	–729	
246	000	

भागफल का दो गुणा

अंतिम भागफल × अंतिम भागफल = वर्गमूल वाली संख्या

123 × 123 = 15129

उदाहरण 3. 104976 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

© JCERT not to be republished

हल–

भाजक	भाज्य	भागफल
3	$\overline{10}\ \overline{49}\ \overline{76}$	324
3	–9	
62	149	
2	– 124	
644	2576	
4	2576	
648	0000	
अंतिम भागफल का दो गुणा		

अंतिम भागफल × अंतिम भागफल = वर्गमूल वाली संख्या

$$324 \times 324 = 104976$$

∴ $\sqrt{104976} = 324$

उदाहरण 4. 10653696 का वर्गमूल निकालिए।

हल

3	$\overline{10}\ \overline{65}\ \overline{36}\ \overline{96}$	3264
3	–9	
62	165	
2	– 124	
646	4136	
6	–3876	
6524	026096	
4	–26096	
6528	00000	
अंतिम भागफल का दोगुना		

अंतिम भागफल × अंतिम भागफल = वर्गमूल वाली संख्या

$$3264 \times 3264 = 10653696$$

∴ $\sqrt{10653696} = 3264$

© JCERT not to be republished

उदाहरण–5. 18769 का वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।

हल

1	$\overline{1}\,\overline{87}\,\overline{69}$	137
1	– 1	
23	087	
3	– 69	
267	1869	
7	–1869	
274	0000	

$\therefore \quad \sqrt{18796} = 137$

उदाहरण 6. 99856 का वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।

हल

3	$\overline{9}\,\overline{98}\,\overline{56}$	316
3	– 9	
61	098	
1	– 61	
626	3756	
6	–3756	
632	0000	

$\sqrt{99856} = 316$

उदाहरण 7. 51.84 का वर्गमूल निकालिए।

हल–

7	$\overline{51}.\overline{84}$	7.2
7	.49	
142	284	
2	–284	
144	000	

$\therefore \quad \sqrt{51.84} = 7.2$

© JCERT not to be republished

उदाहरण 8. 655.36 का वर्गमूल निकालिए

हल

$\therefore \sqrt{655.36} = 25.6$

उदाहरण 9. मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\sqrt{196 \times 16}$ (b) $\sqrt{\frac{196}{361}}$

हल

(a) $\sqrt{196 \times 16} = \sqrt{196} \times \sqrt{16}$

$= 14 \times 4 = 56$

1	$\overline{1}\,\overline{9}\,6$	14
1	–1	
24	0.96	
4	96	
28	00	

तथा $\sqrt{16} = 4$

(b) $\sqrt{\frac{196}{361}} = \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{361}}$

$= \frac{14}{19}$

$\therefore$

1	$\overline{3}\,\overline{6}\,1$	19
1	–1	
29	261	
9	–261	
38	000	

उदाहरण 10. 3 वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक निकालिए।

हल

1	$3.\overline{00}\,\overline{00}$	1.732
1	–1	
27	200	
7	–189	
343	1100	
3	–1029	
2462	7100	
2	4924	
	2176	

$\therefore \sqrt{3} = 1.732$

© JCERT not to be republished

उदाहरण 11. $10\frac{2}{3}$ का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक निकालिए।

हल

$$\sqrt{10\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}} = \frac{5.612}{1.732} = 3.240$$

5	32.000000	5.612
5	25	
106	700	
6	–636	
1121	6400	
1	–6121	
11222	27900	
2	–22444	
11224	5456	

उदाहरण–12. निम्नलिखित में से प्रत्येक के न्यूनतम संख्या कितनी घटाई जाए कि एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

(a) 1989 (b) 26535

हल

(a) पहले 1989 का वर्गमूल निकालिए फिर जो शेषफल आये उसे दी गई संख्या (1989) में घटाइए फिर उसका वर्गमूल निकालिए।

4	$\overline{19}\,\overline{89}$	44
4	–16	
84	389	
4	–336	
88	53	शेषफल

∴ न्यूनतम संख्या 53 है जिसे 1989 में से घटाने पर प्राप्त संख्या एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी।

∴ 1989 – 53 = 1936 (यह एक पूर्ण वर्ग संख्या है)

अब $\sqrt{1936} = 44$

© JCERT not to be republished

(b)

1	$\overline{2}\ \overline{65}\ \overline{35}$	162
1	1	
26	165	
6	–156	
322	935	
2	–644	
324	291	शेषफल

∴ न्यूनतम संख्या = 291 जिसे 26535 में घटाने पर प्राप्त संख्या एक पूर्ण वर्ग बन जायेगी।

∴ 26535 – 291 = 26244 (यह एक पूर्ण वर्ग संख्या है)

अब $\sqrt{26244} = 162$

उदाहरण 13. चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या निकालिए जो पूर्ण वर्ग हो।

हल—चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 9999

∴ चार अंको की सबसे बड़ी पूर्ण संख्या = 9999 – शेषफल

= 9999 – 198 = 9801

9	$\overline{99}\ \overline{99}$	99
9	–81	
189	1899	
9	–1701	
198	198	शेषफल

उदाहरण 14. छह अंकों की सबसे छोटी संख्या बताइए जो पूर्ण वर्ग हो।

हल— छह अंकों की सबसे छोटी संख्या = 100000

वर्गमूल करने पर शेषफल = 144

∴ छह अंकों की सबसे छोटी पूर्ण संख्या = 100000 – शेषफल

= 100000 – 144 = 99856

3	$\overline{10}\ \overline{00}\ \overline{00}$	316
3	–9	
61	100	
1	– 61	

© JCERT not to be republished

626	3900
6	– 3756
632	144 शेषफल

उदाहरण 11. एक आयत की लम्बाई, चौड़ाई की छः गुनी है। यदि क्षेत्रफल 6144 है तो आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना आयत की चौड़ाई x cm है

∴ लम्बाई = 6x cm

∴ आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$6144 = 6x \times x$

या $6x^2 = 6144$

∴ $x^2 = \frac{6144}{6}$

या, $x^2 = 1024$

∴ $x = \sqrt{1024} = 32$

∴ आयत की लम्बाई = $6x = 6 \times 32 = 192$ cm

चौड़ाई = $x = 32$ cm

उदाहरण 16. एक माली के पास 1030 पौधे हैं। इन पौधों को वह इस प्रकार लगाना चाहता है कि पंक्तियों की संख्या और स्तम्भों की संख्या समान रहे। इसके लिए कम से कम और कितने पौधों की आवश्यकता है।

हल– पंक्तियों की संख्या = स्तंभों की संख्या

अब

	$\overline{10}\ \overline{30}$	32
3		
3	–9	
62	130	
2	124	
64	6 शेषफल	

∴ 1030 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है क्योंकि 6 शेषफल बच गए

अतः $32^2 < 1030 < 33^2$

∴ $33^2 = 33 \times 33 = 1089$

अतः कुल 1089 पौधे चाहिए जबकि पूर्व में प्राप्त पौधों की संख्या = 1030

© JCERT not to be republished

∴ आवश्यक पौधों की संख्या = 1089 – 1030 = 59

उदाहरण 17 एक विद्यालय में 630 विद्यार्थी हैं। खेल शिक्षक के अभ्यास के लिए इन्हें इस तरह खड़ा किया कि पंक्तियों की संख्या और स्तंभों की संख्या समान रहे। इस व्यवस्था को बनाने में कितने विद्यार्थियों को बाहर जाना होगा।

हल– ∴ पंक्तियों की संख्या = स्तम्भों की संख्या =

अतः 630 का वर्गमूल करेंगे।

2	$\overline{6}\,\overline{30}$	25
2	–4	
45	230	
5	–225	
30	5 शेषफल	

यहाँ शेष 5 आया

∴ 5 विद्यार्थियों को बाहर करना होगा

उदाहरण 18. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसको 252 में जोड़ने पर योगफल एक पूर्ण वर्ग बन जाए। इस पूर्ण वर्ग का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

हल–

	$\overline{2}\,\overline{52}$	15
1		
1	–1	
25	152	
5	125	
30	27 शेषफल	

यहाँ 252 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है

∴ $15^2 < 25^2 < 16^2$

∴ अभीष्ट संख्या = $16^2 - 252 = 256 - 252 = 4$

अब दी गई संख्या में 4 जोड़ने पर योगफल एक पूर्ण वर्ग संख्या होगी

∴ $252 + 4 = 256$

∴ $\sqrt{256} = 16$

Ans. 4 तथा 16

© JCERT not to be republished

प्रश्नावली 2.5

1. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।

   (*a*) 324 (*b*) 529 (*c*) 1296 (*d*) 54756

   (*e*) 173056 (*f*) 273529 (*g*) 5683456

2. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

   (*a*) 1.96 (*b*) 5.5696 (*c*) 18.4041 (*d*) 91.3936

   (*e*) 541.4929 (*f*) 749.6644 (*g*) 1870.5625

3. मान ज्ञात कीजिए।

   (*a*) $\sqrt{324} \times \sqrt{25}$ (*b*) $\sqrt{729} \times \sqrt{9}$ (*c*) $\sqrt{529} \times \sqrt{400}$ (*d*) $\sqrt{\dfrac{169}{361}}$

   (*e*) $\sqrt{7\dfrac{1}{9}}$

4. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसको 1664 से घटाने पर पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

5. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में कम से कम कितनी संख्या घटाई जाए कि एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

   (*a*) 1899 (*b*) 2730 (*c*) 5790 (*d*) 15150

   (*e*) 19052

6. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसको 8350 में जोड़ने पर योगफल पूर्ण वर्ग हो जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

7. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में कम से कम कितना जोड़ा जाए कि एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

   (*a*) 320 (*b*) 668 (*c*) 1825 (*d*) 1750

   (*e*) 15370

8. चार अंकों की सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो पूर्ण वर्ग हो।

9. तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो पूर्ण वर्ग हो।

10. एक आयत की लम्बाई, चौड़ाई की चार गुणी है। यदि आयत का क्षेत्रफल 5184 वर्ग मीटर है तो आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

© JCERT not to be republished

JEPC Reference Book for Free Distribution : 2022-23

11. एक किसान के पास 1042 पौधे हैं। इन पौधों को वह इस प्रकार लगाना चाहता है कि पंक्तियों की संख्या और स्तम्भों की संख्या समान रहे। इसके लिए कम से कम और कितने पौधों की आवश्यकता है।

12. $\frac{3}{7}$ का वर्गमूल दशमलव के चार स्थानों तक निकालिए।

13. $10\frac{2}{3}$ का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक निकालिए।

14. 2 का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक निकालिए।

15. $\sqrt{15625}$ का मान निकालिए और इसका उपयोग करके निम्नलिखित का मान निकालिए।

(a) $\sqrt{156.25} = \sqrt{1.5684}$ (b) $\sqrt{156.25} - \sqrt{1.5684}$

उत्तरमाला

1. (a) 18 (b) 23 (c) 36 (d) 234
   (e) 416 (f) 523 (g) 2384

2. (a) 1.4 (b) 2.36 (c) 4.29 (d) 9.56
   (e) 23.27 (f) 27.38 (g) 43.25

3. (a) 90 (b) 81 (c) 460 (d) $\frac{13}{19}$
   (e) $\frac{8}{3}$

4. छोटी संख्या $= 64$ वर्गमूल $= 40$

5. (a) $50, \sqrt{1849} = 43$ (b) $26, \sqrt{2704} = 52$
   (c) $14, \sqrt{5776} = 76$ (d) $21, \sqrt{15129} = 123$
   (e) $8, \sqrt{19044} = 138$

6. $114, \sqrt{8464} = 92$

7. (a) $4, \sqrt{324} = 18$ (b) $8, \sqrt{676} = 26$
   (c) $24, \sqrt{1849} = 43$ (d) $14, \sqrt{1764} = 42$
   (e) $6, \sqrt{15370} = 124$

8. 1024 9. 961 10. लम्बाई $= 144$ मीटर, चौड़ाई $= 36$ मीटर

11. 47 पौधे 12. 0.6547 13. 3.266 14. 1.414 15. 125

16. (a) 13.75 (b) 11.25

© JCERT not to be republished