पाठ 04

घातांक और घात

हम सीखेंगे–

- घातांक एवं घात
- घातांक के नियम
- संख्याओं को मानक रूप एवं सामान्य रूप में बदलना

भूमिका : हम पिछली कक्षा में घातांको के रूप में प्राकृत संख्याओं का प्रयोग करना सीख चुके हैं। हम घातांको के नियमो तथा घातांक का उपयोग कर बड़ी संख्याओं को मानक रूप में लिखना भी सीख चुके हैं। इस कक्षा में हम घातांको के रूप में पूर्णांकों तथा परिमेय संख्याओं का प्रयोग करना सीखेंगें।

ऋणात्मक घातांकों की घात :

इसे समझने के लिए एक प्रतिरूप को आगे बढ़ाते है–

$$10^3 = \frac{10^4}{10}$$

$$10^2 = \frac{10^3}{10}$$

$$10^1 = \frac{10^2}{10}$$

$$10^0 = \frac{10^1}{10}$$

© JCERT not to be republished

$$10^{-1} = \frac{10^0}{10} = \frac{1}{10}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10^2}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10^3}$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10^4}$$

अतः हम कह सकते हैं कि किसी शून्येतर संख्या a के लिए $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ जहां m एक धनात्मक संख्या है। a^{-m}, a^m का गुणात्मक प्रतिलोम है।

उदाहरण :

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\frac{2}{5}}\right)^3 = 1^3 \div \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 1^3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3$$

अर्थात्; $$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{125}{8}$$

दशमलव संख्या पद्धति :

संख्याओं को प्रसारित कर लिखना हम पिछली कक्षा में सीख चुके हैं। आइये दशमलव संख्या को कैसे प्रसारित कर घातांक रूप में लिखते हैं सीखें।

$$625.25 = 6 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

$$= 6 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

$$7597.695 = 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 9 \times 10 + 7 \times 1 + \frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{5}{1000}$$

© JCERT not to be republished

$$= 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

घातांक के नियम :

(*i*) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(*ii*) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(*iii*) $(a^m)^n = a^{mn}$

(*iv*) $a^m \times b^m = (a^b)^m$

(*v*) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

(*vi*) $a^0 = 1 \ (a \# 0)$

(*vii*) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$

(*viii*) $a^m = b^m$ तो $a = b$

(*ix*) $a^m = a^n$ तो $m = n$

m और n पूर्णांक है तथा a और b शून्येतर परिमेय संख्याएं हैं।

उदाहरण 1: मान ज्ञात कीजिए।

हल : (*i*) $(-2)^{-4} \times (-2)^{-3} = (-2)^{-4-3}$

$$= (-2)^{-7}$$

(*ii*) $(-3)^5 \times (-3)^{-6} = (-3)^{5-6}$

$$= (-3)^{-1} = (-3)^{-1} = \frac{1}{(-3)^1} = \frac{-1}{3}$$

उदाहरण 2: मान ज्ञात कीजिए।

(*i*) $\dfrac{(5)^{-2}}{(5)^4}$ (*ii*) $\dfrac{2^4}{2^{-5}}$ (*iii*) $\dfrac{1}{3^{-5}}$ (*iv*) $(5^2)^{-2}$

हल : (*i*) $\dfrac{5^{-2}}{5^4} = 5^{-2} \times \dfrac{1}{5^4} = 5^{-2} \times 5^{-4}$

$$= 5^{(-2)+(-4)} = 5^{-6} = \frac{1}{5^6} = \frac{1}{15625}$$

© JCERT not to be republished

(ii) $$\frac{2^4}{2^{-5}} = 2^4 \times \frac{1}{2^{-5}} = 2^4 \times 2^5$$
$$= 2^{4+5} = 2^9 = 512$$

(iii) $$\frac{1}{3^{-5}} = 3^5 = 243$$

(iv) $$(5^2)^{-2} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4}$$
$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{625}$$

उदाहरण 3: सरल कीजिए।

(i) $(-3)^4 \times (-3)^{-5}$ (ii) $5^4 \div 5^{-6}$

(iii) $(3^{-2} \div 3^{-4})^3$ (iv) $(2^{-5} \div 2^{-6})^3 \times 2^3$

हल : (i) $(-3)^4 \times (-3)^{-5} = (-3)^{4+(-5)} = (-3)^{-1}$
$$= \frac{1}{-3^1} = \frac{1}{-3}$$

नियम $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $5^4 \div 5^{-6} = 5^4 \times \frac{1}{5} - 6$
$$= 5^4 \times 5^6 = 5^{10}$$
$$= 25 \text{ नियम } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

(iii) $(3^{-2} \div 3^{-4})^3 = (3^{-2+4})^3 \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$$= (3^{-2+4})^3 = (3^2)^3 = 3^6$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

(iv) $(2^{-5} \div 2^{-6})^3 \times 2^3 = (2^{-5-(-6)})^3 \times 2^3$
$$= a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$= (2^{-5+6})^3 \times 2^3 = (2^1)^3 \times 2^3$$
$$= (2^{1+3})^3 = 2^4 = (2 \times 2)^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$
$$= a^m \times a^n = a^{m+n}$$

© JCERT not to be republished

उदाहरण 4 : x का मान ज्ञात कीजिए। यदि $(-5)^{x-1} \times (-5)^{-2} = (-5)^5$

हल : $(-5)^{x-1} \times (-5)^{-2} = (-5)^5$

$$(-5)^{x-1-2} = (-5)^5 \qquad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(-5)^{x-1-2} = (-5)^5$$

$$(-5)^{x-3} = (-5)^5$$

$$x - 3 = 5 \qquad a^m = a^n \text{ तो } m = n$$

$$x = 5 + 3 = 8$$

उदाहरण 5 : $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$$= \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{125}{27}$$

उदाहरण 6 : सरल कीजिए।

$$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right\} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$$

हल :

$$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right\} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{1}\right)^2\right\} \div (5)^3$$

$$= \left(\frac{27}{7} - \frac{4}{1}\right) \div 125$$

$$= \left(\frac{27 - 32}{8}\right) \div 125$$

$$= \frac{-5}{8} \times \frac{1}{125}$$

$$= \frac{-\cancel{5}^{-1}}{\cancel{1000}_{200}} = \frac{-1}{200}$$

© JCERT not to be republished

प्रश्नावली 4.1

1. मान ज्ञात कीजिए।

   (*i*) $(2)^{-3}$ (*ii*) $(-3)^{-4}$ (*iii*) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ (*iv*) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

2. सरल करें तथा उत्तर को धनात्मक घातांक के रूप में व्यक्त कीजिए।

   (*i*) $(3)^{-3} \times 3^{-5}$ (*ii*) $(-5)^{-4} \div (-5)^{-7}$ (*iii*) $(2^{-5} \div 2^{-7}) \times 2^{-3}$

   (*iv*) $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{2}$ (*v*) $(-5)^{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{3}$

3. मान ज्ञात कीजिए।

   (*i*) $\left(\frac{8}{-9}\right)^{-4}$ (*ii*) $\left[\left(\frac{-7}{3}\right)^{-2}\right]^{2}$ (*iii*) $\left(\frac{-2}{7}\right)^{-3}$ (*iv*) $\left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^{-2}$

   (*v*) $\{(5^{2})^{-1}\}^{0}$

4. x का मान ज्ञात कीजिए यदि $\left(\frac{-3}{5}\right)^{3} \times \left(\frac{-3}{5}\right)^{3} = \left(\frac{-3}{5}\right)^{5}$

5. x का मान ज्ञात कीजिए यदि $2^{x} \times 2^{2x-4} = 2^{5}$

6. यदि $\frac{3n \times 3^{7}}{3^{-2}} = 3^{15}$ है, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

7. x का मान ज्ञात कीजिए यदि $2^{-4x} \times 2^{8} = 1$

8. यदि $a = -1$ और $b = 2$ है, तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए।

   (*i*) $a^{b} - b^{a}$ (*ii*) $(a^{b} \div b^{a})^{-} \times a^{b}$

9. सरल कीजिए।

   (*i*) $\frac{6x^{2} \times 9y^{-3}}{(2x)^{-4} \times (3y)^{2}}$ (*ii*) $\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-1}\right)^{2}$

   (*iii*) $(7^{8} + 2^{-3} + 3^{3})^{0}$ (*iv*) $\frac{125 \times x^{-3}}{5^{-3} \times 25 \times x^{-6}}$

   (*v*) $\frac{1}{27} \times (3^{-3})$

© JCERT not to be republished

छोटी संख्याओं को घातांको का प्रयोग कर मानक रूप में व्यक्त करना

पिछली कक्षा में हमने बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना सीख चुके हैं। अब हम छोटी–छोटी संख्याओं को घातांको के प्रयोग से मानक रूप में लिखना सीखेंगे।

छोटी संख्याओं को मानक रूप में लिखने के लिए संख्याकों को 1.0 और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या और 10 के ऋणात्मक घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण 1 : निम्न संख्याओं को मानक रूप में लिखिए।

(*i*) 0.000024 (*ii*) 0.000136

हल : (*i*) $0.000024 = \frac{24}{1000000} = \frac{2.4 \times 10}{10^6}$

$= 2.4 \times 10^1 \times 10^{-6} = 2.4 \times 10^{1-6}$

$= 2.4 \times 10^{-5}$

(*ii*) $0.000136 = \frac{136}{1000000} = \frac{1.36 \times 100}{10^6} = 13.6 \times 10^2 \times 10^{-6}$

$= 1.36 \times 10^{2-6}$

$= 1.36 \times 10^{-4}$

उदाहरण 2 : निम्नलिखित को सामान्य रूप में लिखिए।

(*i*) 3.5×10^{-7} (*ii*) 6×10^{-3}

हल : (*i*) $3.5 \times 10^{-7} = \frac{35}{10} \times 10^{-7}$

$= 35 \times 10^{-1} \times 10^{-7} = 35 \times 10^{-1+(-7)}$

$= 35 \times 10^{-8} = \frac{35}{100000000}$

$= 0.00000035$

(*ii*) $6 \times 10^{-3} = \frac{6}{10^3}$

$= \frac{6}{1000} = 0.006$

© JCERT not to be republished

बहुत बड़ी संख्याओं और छोटी संख्याओं की तुलना

(*i*) **बहुत बड़ी संख्याओं की तुलना:** A का द्रव्यमान $3.6 \times 10^{12} kg$ है और B का द्रव्यमान $1.2 \times 10^{15} kg$ है।

इनके द्रव्यमानों की तुलना कीजिए।

$$\frac{1.2 \times 10^{15} kg}{3.6 \times 10^{12} kg} = \left(\frac{1.2}{3.6}\right) \times 10^{15-12} = \frac{1}{3} \times 10^{3}$$

$$= 0.333 \times 10^{3} = 333$$

अतः B का द्रव्यमान A के द्रव्यमान का 333 गुणा है।

(*ii*) **दो बहुत छोटी संख्याओं की तुलना:** A का द्रव्यमान $0.000056 kg$ है तथा B का द्रव्यमान $8.5 \times 10^{-6} kg$ है।

इनके द्रव्यमानों की तुलना कीजिए।

$$A \text{ का द्रव्यमान} = 0.000056 kg = \frac{56}{1000000} kg$$

$$= \frac{5.6 \times 10}{10^{6}} kg$$

$$= 5.6 \times 10^{1} \times 10^{-6} kg$$

$$= 5.6 \times 10^{-5} kg$$

$$\text{द्रव्यमानों की तुलना} = \frac{A}{B} = \frac{5.6 \times 10^{-5}}{8.5 \times 10^{-6}} = \frac{56}{85} \times 10^{-5+6}$$

$$= \frac{56}{85} \times 10^{1} = 6.59 \text{ गुणा}$$

अतः A का द्रव्यमान, B के द्रव्यमान का 6.59 गुणा है।

प्रश्नावली 4.2

1. निम्न संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

   (*i*) 0.0000545 (*ii*) 0.00000036 (*iii*) 0.0038 (*iv*) 0.0000002638

   (*v*) 0.037×10^{15} (*vi*) 0.0004×10^{-5}

2. निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में लिखिए।

   (*i*) 0.074×10^{-7} (*ii*) 1.418×10^{-4} (*iii*) 1.675×10^{-11} (*iv*) 4.189×10^{-7}

   (*v*) 7.34×10^{-22}

© JCERT not to be republished

3. निम्न में से प्रत्येक को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

(*i*) 1 नैनो मीटर $= \dfrac{1}{1000000000}$

(*ii*) लाल रक्त कोशिकाओं का आकार $= 0.000007m$

(*iii*) एक कागज की मोटाई $0.0016m$ है। इसे mm में बदलिए और मानक रूप व्यक्त कीजिए।

(*iv*) एक इलेक्ट्रान का आवेश 0.00000000000000000016 कूलंब है। इसे मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

(*v*) एक पुस्तक की मोटाई $3cm$ है इसमें कुल 1200 पृष्ठ है। एक पृष्ठ की मोटाई ज्ञात कीजिए।

4. एक पुस्तक की मोटाई $4cm$ है और पुस्तक में प्रयोग किए गए कागज की मोटाई $0.0004cm$ है। पुस्तक कागज की मोटाई की कितनी गुणी है।

नोटः $\dfrac{\text{पुस्तक की मोटाई}}{\text{कागज की मोटाई}}$

© JCERT not to be republished

उत्तरमाला

प्रश्नावली 4.1:

1. (*i*) $\dfrac{1}{8}$ (*ii*) $\dfrac{1}{81}$ (*iii*) $\dfrac{243}{32}$ (*iv*) 4

2. (*i*) 3^{-8} (*ii*) $(-5)^3$ (*iii*) 2^{-1} (*iv*) 3^4
   (*v*) $(-2)^3$

3. (*i*) $\dfrac{6561}{4096}$ (*ii*) $\dfrac{81}{2401}$ (*iii*) $\dfrac{343}{8}$ (*iv*) $\dfrac{1}{4}$ (*v*) 1

4. 2 5. 3 6. 6 7. 2

8. (*i*) $\dfrac{1}{2}$ (*ii*) 2

9. (*i*) $\dfrac{3x^6}{8y^5}$ (*ii*) 1 (*iii*) 1 (*iv*) $625x^3$
   (*v*) $\dfrac{1}{729}$

प्रश्नावली 4.2:

1. (*i*) 5.45×10^{-6} (*ii*) 3.6×10^{-7}

   (*iii*) 3.8×10^{-3} (*iv*) 3.7×10^{-17}

   (*v*) 4×10^{-9}

2. (*i*) 0.0000000074 (*ii*) 0.0001418

   (*iii*) 0.00000000001675 (*iv*) 0.0000004189

   (*v*) 0.0000000000000000000000734

3. (*i*) $10^{-9} nm$ (*ii*) $7 \times 10^{-6} m$

   (*iii*) $1.6 \times 10^{-2} mm$ (*iv*) 1.6×10^{-19} कूलंब

   (*v*) $2.5 \times 10^{-3} cm$

4. 10000 गुणा

© JCERT not to be republished