संख्याओं के साथ खेलना

हम सिखेंगे–

- संख्याओं का व्यापक रूप एवं उसे व्यापक रूप में लिखते है। सामान्य रूप
- क्रिप्टेरिदम में प्रयुक्त भिन्न–भिन्न अक्षरों का मान ज्ञात करना विभाज्यता का नियम

अधिगम प्रतिफल

- 2 अंकों एवं 3 अंको की संख्याओं को
- क्रिप्टेरिदम में प्रयुक्त भिन्न–भिन्न
- अक्षरों का मान ज्ञात करना
- 2,3,4,5,6,9, तथा 11 के विभाजन नियम को सिद्ध करते है।

भूमिका :

हम पिछली कक्षाओं में संख्या परिवार से परिचित है, जैसे प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक आदि। साथ ही विभिन्न संख्याओं से विभाज्यता की शर्तों का भी अध्ययन कर चुके है। अब हम संख्याओं से संबंधित कुछ रोचक जानकारी प्राप्त करेंगें।

संख्याओं का व्यापक रूप :

1. हम दो अंकों की एक संख्या 17 लेते हैं जिसे हम विस्तृत रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:–

$$17 = 1*10 + 7$$

इसी प्रकार,

$$35 = 10*3 + 5$$

$$ab = 10*a + b$$

2. हम तीन अंकों की एक संख्या 428 लेते है जिसे हम विस्तृत रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:–

$$428 = 100*4 + 10*2 + 1*8$$

इसी प्रकार,

$$635 = 100*6 + 10*3 + 1*5$$

$$738 = 100*7 + 10*3 + 1*8$$

$$abc = 100*a + 10*b + 1*c$$

इसी प्रकार बीजीय व्यंजक को भी व्यापक रूप में प्रकट कर सकते हैं:

$$ab = 10*a + 1*b = 10a + b$$

$$ba = 10*b + 1*a = 10b + a$$

$$abc = 100*a + 10*b + 1*c$$

$$= 100a + 10b + c$$

$$bac = 100*b + 10*a + 1*c$$

$$= 100b + 10a + c$$

$$cba = 100*c + 10*b + 1*a$$

$$= 100c + 10b + a$$

प्रयास कीजिए: 1

1. निम्नलिखित संख्याओं को व्यापक रूप में लिखिए।

   (*i*) 35 (*ii*) 107 (*iii*) 768 (*iv*) xy

   (*v*) yzx

2. निम्नलिखित को सामान्य रूप में लिखिए।

   (*i*) $10*5 + 7*1$ (*ii*) $100*7 + 3*10 + 0$

   (*iii*) $100*p + 10*q + 1*r$ (*iv*) $100*7 + 0$

संख्याओं से संबंधित रोचक खेल :

खेलः अंकों को पलटना – दो अंको की संख्या

कुमुद	किरण
दो अंको की एक संख्या लीजिए।	72
अब संख्या के अंकों को पलट दीजिए।	अच्छा पलटने से 27 प्राप्त हुआ।
पुराना और नया प्राप्त दोनों संख्याओं का योग निकालिए।	ठीक है, 72+27 = 99 मिला
अब दोनों योग को 11 से भाग दीजिए।	99 / 11 = 9 भागफल मिला।
आपको शेषफल शून्य मिला होगा।	सही है, आश्चर्य आपको कैसे मालूम हुआ?

प्रयास कीजिएः 2

1. जाँच कीजिए कि यदि किरण ने निम्नांकित संख्याएँ चुनी होती, तो परिणाम क्या होते।

   (*i*) 37 (*ii*) 40 (*iii*) 98 (*iv*) 65

उपर्युक्त पहेली के रहस्य को समझते हुए :

माना किरण ने एक संख्या ab जिसका विस्तृत रूप $10a + b$ है। a और b को पलटने से ba संख्या मिली जिसका विस्तृत रूप $10b + a$ है।

$$
\begin{aligned}
\text{अब, } ab \text{ और } ba \text{ का योग} &= 10a + b + 10b + a \\
&= 11a + 11b \\
&= 11(a + b)
\end{aligned}
$$

हमने देखा, इसका योग सदैव 11 का गुणज (Multiple) है।

अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि दो अंकों की एक संख्या एवं अंकों को पलटने से प्राप्त संख्या का योग हमेशा 11 का गुणज होता है।

खेल 2: अंकों को पलटना – तीन अंकों की संख्या

श्रेया	सुमन
तीन अंकों की एक संख्या लिजिए।	ठीक है, 231 लिया।
अब उलटने क्रम में इस संख्या को पलट दीजिए।	पलटने से 132 प्राप्त हुआ।
बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाइए।	$231 - 132 = 99$ प्राप्त हुआ।
इसे 99 से भाग दीजिए।	$99/99 = 1$ भागफल मिला।
निश्चित रूप से शेषफल शून्य होगा।	हाँ, परन्तु कैसे?

प्रयास कीजिए: 3

1. जाँच कीजिए कि यदि सुमन ने निम्नांकित संख्याएँ चुनी होती है, तो परिणाम क्या होता?

   (*i*) 702 (*ii*) 432 (*iii*) 312 (*iv*) 400

उपर्युक्त पहेली के रहस्य का कारण:

माना सुमन ने एक संख्या xyz लिया जिसका विस्तृत रूप $100z + 10y + x$ है।

स्थिति 1: यदि $x > z$ है, तब

$$\begin{aligned} xyz - zyx &= (100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) \\ &= 100x + 10y + z - 100z - 10y - x \\ &= (100x - x) - (100z - z) \\ &= 99x - 99z \\ &= 99\ (x - z) \end{aligned}$$

स्थिति 2: यदि $z > x$ है, तब

$$\begin{aligned} zyx - xyz &= (100z + 10y + x) - (100x + 10y + z) \\ &= 100z + 10y + x - 100x - 10y - z \\ &= (100z - z) - (100x - x) \\ &= 99z - 99x \\ &= 99\ (z - x) \end{aligned}$$

स्थिति 3: यदि $x = z$ है, तब

$$xyz - zyx = xyx - xyx = 0$$

स्थिति में परिणाम 99 से विभाजित है। अतः शेषफल शून्य प्राप्त होता है।

क्रिप्टेरिदम (Cryptarithms) :

यह संख्या पहेली है जो संख्याओं के संक्रियाओं पर आधारित होती है जिसमें विभिन्न अंकों के लिए भिन्न–भिन्न अक्षरों का प्रयोग करते हैं। यह एक प्रकार का कोड जैसा है। इसमें प्रश्न यह होता है कि प्रयुक्त अक्षर किस अंक के लिए है।

इसमें निम्नांकित दो नियम है:–

(*i*) अलग–अलग पहेली में प्रत्येक अंक के लिए केवल एक ही अक्षर प्रयोग में लाने हैं।

(*ii*) किसी भी संख्या का पहला अंक शून्य नहीं होना चाहिए। जैसे 21 के स्थान पर 021 नहीं लिखना है।

उदाहरण 1 :

$$\begin{array}{ccc} & 4 & 5 \\ + & 3 & P \\ \hline & Q & 7 \\ \hline \end{array}$$

उपर्युक्त योग में P तथा Q का मान निकालिए।

हल : **चरण 1 :** $5 + P = 7$

या $P = 7 - 5 = 2$

चरण 2 : $4 + 3 = Q$

या $Q = 7$

अतः $P = 2$

$Q = 7$

उदाहरण 2 :

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & P \\ + & & P \\ \hline & Q & P \\ \hline \end{array}$$

उपर्युक्त योग में P और Q का मान निकालिए।

हल : $P + P + P$ = एक ऐसी संख्या है जिसकी इकाई का अंक P है। 0 से 9 के बीच P का मान 5 रखने पर $5 + 5 + 5 = 15$ प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{cc} & 5 \\ & 5 \\ + & 5 \\ \hline & 15 \\ \hline \end{array}$$

अतः $Q = 1$, तथा $P = 5$

उदाहरण 3 :

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 1 & A \\ + & 1 & A & 3 \\ \hline & 5 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

उपर्युक्त योग में A का मान ज्ञात करें।

हल : $A + 3 =$ एक एक ऐसी संख्या जिसका इकाई का अंक 1 है। 0 से 9 के बीच A का मान 8 है। जिसे रखने पर $8 + 3 = 11$ प्राप्त होता है। आगे भी $(1 + 1) + 8 = 10$ प्राप्त हो जाता है। इसलिए A का मान 8 होगा।

उदाहरण :

$$\begin{array}{ccc} & P & Q \\ & \times & 3 \\ \hline R & P & Q \\ \hline \end{array}$$

उपर्युक्त गुणन में P, Q और R का मान ज्ञात करें।

हल : हमें Q*3 से इकाई के स्थान पर Q प्राप्त करना है।

Q के संभावित मान $Q = 5$ या $Q = 0$ है।

यदि $Q = 5$ है, तो

$$\begin{array}{ccc} & P & 5 \\ & \times & 3 \\ \hline R & P & 5 \\ \hline \end{array}$$

अब, P*3 + 1 से P प्राप्त करना है, जो संभव नहीं है।

$Q = 0$

अब,

$$\begin{array}{ccc} & P & 0 \\ & \times & 3 \\ \hline R & P & 0 \\ \hline \end{array}$$

यहाँ P*3 से दहाई के स्थान पर P प्राप्त करना है।

$P = 5$ रखने पर $5 \times 3 = 15$ प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{ccc} & 5 & 0 \\ & \times & 3 \\ \hline 1 & 5 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$P = 5$, $Q = 0$ तथा $R = 1$

प्रश्नावली 5.1

निम्नलिखित प्रत्येक में अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों का मान ज्ञात कीजिए।

(*i*)

3	A
2	8
B	9

(*ii*)

	A	2
	2	A
B	2	B

(*iii*)

	3	A
+	2	8
	B	7

(*iv*)

	A	9
+	3	B
	B	7

(*v*)

	P	2	Q
+	7	Q	5
1	3	P	Q

(*vi*)

	4	P	Q
+	P	Q	7
	Q	2	5

(*vii*)

	A
×	A
3	A

(*viii*)

X	6
×	Y
10	Y

(*ix*)

	P	Q
	×	6
Q	Q	Q

विभाज्यता की जाँच करना (TEST OF DIVISIBILITY):

(*i*) **2 से विभाज्यता का नियम:** यदि किसी संख्या की इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6 या 8 में से कोई एक अंक हो, तो संख्या 2 से विभाज्य होती है।

जैसे– 1794, 8996, 1120, में प्रत्येक संख्या 2 से विभाज्य है।

(*ii*) **3 से विभाज्यता का नियम:** यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से विभाज्य हो, तो दी गई संख्या भी 3 से विभाज्य होगी।

जैसे– 132

अंकों का योगफल $1 + 3 + 2 = 6$

6 संख्या 3 से विभाज्य है।

132 से 3 विभाज्य होगी।

(*iii*) **4 से विभाज्यता का नियम:** यदि किसी संख्या के इकाई तथा दहाई से बने दो अंक संख्या 4 से विभाज्य हो, तो दी गई संख्या भी 4 से विभाज्य होगी।

जैसे– 43124

यहाँ 24 संख्या 4 से विभाज्य है।

43124 भी संख्या 4 से विभाज्य होगी।

(*iv*) **5 से विभाज्यता का नियमः** यदि किसी संख्या के इकाई अंक के स्थान पर 0 या 5 में से कोई एक अंक हो, तो वह संख्या 5 से विभाज्य होगी।

जैसे– 10, 105, 300, 170, में से प्रत्येक संख्या 5 से विभाज्य है।

(*v*) **6 से विभाज्यता का नियमः** यदि किसी संख्या 2 या 3 दोनों से विभाज्य हो, तो वह संख्या 6 से विभाज्य होगी।

अर्थात 6 से विभाज्य संख्या की इकाई के स्थान का अंक 0, 2, 4, 6 या 8 में से कोई एक होगी और संख्या के सभी अंकों का योग 3 से विभाज्य होगी।

जैसे– 234

इकाई का अंक = 2 (2 से विभाज्य)

अंकों का योग = 2 + 3 + 4

= 9 (3 से विभाज्य)

234 भी संख्या 6 से विभाज्य होगी।

(*vi*) **9 से विभाज्यता का नियमः** यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाज्य हो, तो दी गई संख्या भी 9 से विभाज्य होगी।

जैसे– 621

अंकों का योगफल 6 + 2 + 1 = 9

9 संख्या 9 से विभाज्य है।

621 से 9 विभाज्य होगी।

(*vii*) **11 से विभाज्यता का नियमः** यदि किसी संख्या के विषम स्थानों के अंकों के योग तथा सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 11 से विभाज्य हो, तो दी गई संख्या भी 11 से विभाज्य होगी।

जैसे– 7326

विषम स्थानों के अंकों का योग = 6 + 3 = 9

सम स्थानों के अंकों का योग = 7 + 2 = 9

अंतर = 9 – 9

= 0 (11 से विभाज्य)

7326 संख्या 11 से विभाज्य होगी।