पाठ

06

बीजीय व्यंजक और सर्वसमिकाएँ

मुख्य अवधारणाएँ

- बीजीय व्यंजक क्या है ?
- पद, गुणनखंड, गुणांक
- बहुपद का जोड़, घटाव एवं गुणा
- संख्या रेखा और व्यंजक
- एक पद, द्विपद एवं बहुपद
- सर्वसमिका

सिखने के प्रतिफल

- चरों का प्रयोग कर दैनिक जीवन की समस्याओं तथा पहेली हल करते हैं।
- बीजीय व्यंजकों को गुणा करते हैं।

6.1 भूमिका

पिछली कक्षा–7 में हमने बीजीय व्यंजक के बारे में पढ़ चुके हैं।

जैसे—$2x + 5$, $x - 9$, $x^2 + y - 6$ इत्यादि बीजीय व्यंजक के उदाहरण है।

आइए एक बार फिर बीजीय व्यंजकों के बारे में पुनः अवलोकन करते हुए दो व्यंजकों का गुणनफल करना सीखेंगे।

6.2 बीजीय व्यंजक

गणित की संक्रिया–चिन्ह संख्याओं और सांकेतिक संख्याओं, अर्थात् अक्षरों के एक सार्थक संग्रह को बीजीय व्यंजक कहते हैं।

उदाहरण—$5, 7x, 2y-\frac{9}{2}, x^2+y+1$ इत्यादि।

© JCERT not to be republished

यह सभी बीजीय व्यंजक है।

हम जानते हैं व्यंजकों का निर्माण चरों एवं अचरों की सहायता से होता है। व्यंजक $7x + 2$ को चर x एवं अचरों 2 तथा 7 से बनाया गया है। चर x का मान कुछ भी हो सकता है। यह 2, 5, 0, – 1, $\frac{7}{2}$ इत्यादि हो सकता है। इस प्रकार विभिन्न चर मान के लिए व्यंजक का मान बदल जायगा।

जब $x = 2,\ 7x + 2 = 7 \times 2 + 2 = 16$

जब $x = 5,\ 7x + 2 = 7 \times 5 + 2 = 37$

जब $x = 0,\ 7x + 2 = 7 \times 0 + 2 = 2$

प्रयास कीजिए

व्यंजक $= 7y + 5,\ y = 0, 1, -2, 4$

व्यंजक में एक से अधिक पद भी होते हैं।

एक पद – $x^2, 7y, -2xy, \frac{5}{2}a^2bc$ आदि।

द्विपद – $2x + 1, 7y - x, x^2 - z, 4x - y^2$ आदि।

त्रिपद – $x^2 + y + z, 2x - y + 1, m + n + 4$ आदि।

व्यापक रूप में एक या एक से अधिक पद वाले बीजीय व्यंजक बहुपद कहलाता है।

बीजीय व्यंजक के प्रत्येक चर के घात पूर्ण संख्या होते है।

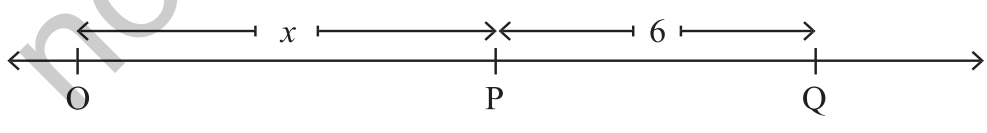
प्रयास कीजिए

एक पद, द्विपद एवं त्रिपद पाँच–पाँच बीजीय व्यंजक बनाइए।

6.3 संख्या रेखा और व्यंजक

हम संख्या रेखा पर 1, 2, 5, – 6, – 8 आदि को निरूपित करना जानते हैं।

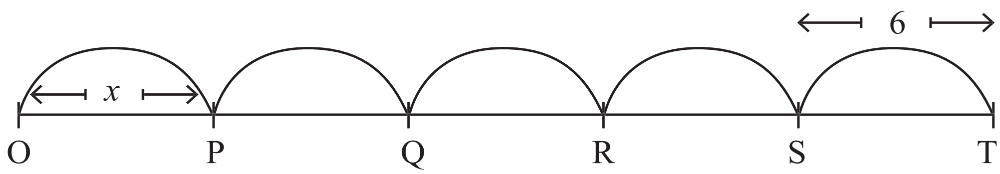
अब हम $x + 6$ को संख्या रेखा पर निरूपित करना सीखेंगे।



माना संख्या रेखा पर चर x की स्थिति है। संख्या रेखा पर कहीं भी हो सकता है परंतु यह निश्चित है कि $x + 6$ का मान P के दाई तरफ 6 इकाई की दूरी पर बिन्दु Q से निरूपित होगा।

© JCERT not to be republished

इसी प्रकार, $x - 4$ का मान P के बाई तरफ 4 इकाई की दूरी पर होगा। $4x$ तथा $4x + 6$ की स्थिति के देखते हैं।



यहाँ $4x$ की स्थिति S पर होगी। मूल बिन्दु से S की दूरी P की दूरी से चार गुना होगी। $4x + 6$ की स्थिति T, S के दाई तरफ 6 इकाई की दूरी पर होगी।

प्रयास कीजिए

$x, x - 4, 3x + 5$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

6.4 समान एवं असमान पद

समान चर और घात एवं विभिन्न संख्यात्मक गुणंक वाले व्यंजक समान पद कहलाते हैं। जैसे— $7x, 2x, \frac{-4}{9}, 20x$ इत्यादि समान पद है। यहाँ व्यंजकों का संख्यात्मक गुणांक $1, 2, \frac{-4}{9}$ एवं 20 है। ये सभी व्यंजकों का चर मान x तथा संख्यात्मक मान भिन्न है।

इस प्रकार $7xy, 8xy^2, -5x^2y^2, 2mn$ आदि असमान पद है।

6.5 बीजीय व्यंजकों का योग एवं व्यवकलन

हम बीजीय व्यंजकों को जोड़ना एवं घटना क्षैतिज विधि (Horizontal method) एवं स्तम्भ विधि (column method) द्वारा सीख चुके हैं।

उदाहरणार्थ—$7x^2 + 6x - 8$ एवं $9x - 5$ को जोड़ने हम इस प्रकार जोड़ते हैं।

$$\begin{array}{r} 7x^2 + 6x - 8 \\ 9x - 5 \\ \hline 7x^2 + 15x - 13 \end{array}$$

उदाहरण 1. $x^2 + 4xy - y^2, 4x^2 - 2xy - 2y^2$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r} x^2 + 4xy - y^2 \\ + \; 4x^2 - 2xy - 2y^2 \\ \hline 5x^2 + 2y - 3y^2 \end{array}$$

© JCERT not to be republished

उदाहरण 2. $7xy + 2yz - zx, 4xy - 9zx + y, - 2zx + 5x - 2z$ का योग ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{rcl} 7xy + 2yz & - & zx \\ + \; 4xy & - & 9zx + y \\ + \; -2xy & - & 2zx + 5x \\ \hline 9xy + 2yz & - & 12zx + y + 5x \end{array}$$

उदाहरण 3. $2a - b + ab, b + c - ac$ और $bc - 2a - c$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $2a - b + ab + (b + c - ac) + (bc - 2a - c)$

$= 2a - b + ab + b + c - ac + bc - 2a - c$

$= 2a - 2a - b + b + c - c - ac + bc - 2a - c$

$= 2a - 2a - b + b + c - c + ab - ac + bc$

$= ab + bc - ac$

(समान पदों को व्यवस्थित करने पर)

उदाहरण 4. $4m^2 + 5mn - 9$ में से $2m^2 - 3mn + 7$ को घटाइए।

$$\begin{array}{rcl} 4m2 + 5mn & - & 9 \\ -\; 2m2 - 3mn & + & 7 \\ + & - & \\ \hline 2m^2 + 8mn & - & 16 \end{array}$$

उदाहरण 5. $10b - 2ab + 4a + 7$ में से $2a - 7ab + 8b–2$ घटाइए।

हल : $10b - 2ab + 4a + 7 - (2a - 7ab - 8b - 2)$

$= 10b - 2ab + 4a + 7 - 2a + 7ab - 8b + 2$

(कोष्ठक हटा कर चिह्न परिवर्तित करने पर)

$= 10b - 8b - 2ab + 7ab + 4a - 2a + 7 + 2$

(समान पदों को व्यवस्थित करने पर)

$= 2a + 2b + 5ab + 9.$

© JCERT not to be republished

प्रश्नावली 6.1

1. निम्न को एकपद, द्विपद एवं त्रिपद में वर्गीकृत कीजिए।

(i) $2x + 7$ (ii) x (iii) $\frac{7}{2}$ (iv) $-4 + 5y$

(v) $x^2 + y + 7$ (vi) $3x - y - z$ (vii) $7x + y$ (viii) $l + mn + 2$

2. निम्न में कौन–कौन समान पद है ?

(i) $9x$ (ii) $-4xy$ (iii) $\frac{-4}{2}x$ (iv) x^2y

(v) $\frac{2}{3}xy$ (vi) $5x^2y$ (vii) $\frac{-7}{2}x^2y$ (viii) $6xy$

3. निम्न व्यंजकों का संख्यात्मक गुणांक कीजिए—

(i) $\frac{7}{2}xy$ (ii) $-5x^2$ (iii) $9x^2y$ (iv) $\frac{-2}{9}xyz$

(v) $12xy$ (vi) $-xy^2$ (vii) $4ab$ (viii) $9lmn$

4. रिक्त स्थानों को भरिए—

(i) $x + 7$ और $13 + 4x$ का योगफल __________ है।

(ii) $9x - 2$ और __________ का योगफल $2x + 11$ है।

(iii) $7x^2 - 1$ और $1 - 4x^2$ का योगफल __________ है।

5. निम्न का योगफल निकालिए—

(i) $8x^2 - 7x + 4, -4x^2 + 7x - 5$ और $x^2 - x - 1$

(ii) $a^2 + b^2 - 2c^2, 8c^2 - 2b^2$ और $3b^2 - 2a^2 + c^2$

(iii) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{3}$ और $4x^2 - \frac{3}{4}x - 2$

(iv) $3xy - 2yz + 4zx, x^2 - 4zx + xy$ और $y^2 - 2yz + z^2$

(v) $4ab - 3abc + a^2b^2c^2, abc + ab - a^2b^2c^2$ और $4a - 3b$

6. (i) $17ab - 14bc + 17ca$ में से $2bc + ab - 6ca$ को घटाइए।

(ii) $6a^2 - 8a + 4$ में से $-2a^2 - 3a - 7$ को घटाइए।

© JCERT not to be republished

(iii) $4t^2 - 7t + 15$ में से $3t + 5 - t^3$ को घटाइए।

(iv) $16x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 7$ में से $4 + 3x - 4x^3 + 12x^2$ को घटाइए।

(v) $15x^4 - 6x^2 + 7$ में से $8 - 4x + 3x^3 - x^4$ को घटाइए।

7. यदि $x = 4$ और $y = 2$ तो निम्न व्यंजकों का मान ज्ञात करें—

(i) $x^2 + y - xy$ (ii) $\dfrac{x-4y}{2x+y}$

8. व्यंजक $8y - 3y^4 - 2y^3$ को y के घटते हुए घातों वाले पदों के क्रम में लिखिए।

6.6 बीजीय व्यंजकों का गुणन

हम जानते हैं कि गुणन की क्रिया लगातार योग की ही क्रिया है। जैसे—

$$4 + 4 + 4 = 3 \times 4$$

$$x \times x \times x \times x \times x = 5 \times x = 5x$$

$$y + y + y + y + y + y = 7 \times y = 7y$$

(i) आइए अब हम बिन्दुओं के निम्न प्रतिरूपों से गुणन को समझेंगे।

(ii) इस प्रकार हम और परिस्थितियों के बारे में सोच सकते हैं जिसमें दो बीजीय व्यंजकों को गुणा करना पड़ता है।

रूपा उठकर कहती है "हम आयत के क्षेत्रफल के बारे में सोच सकते हैं। आयत का क्षेत्रफल $l \times b$ है जिसमें l लंबाई और b चौड़ाई है। यदि अयत की लंबाई 4 इकई बड़ा दी जाए और चौड़ाई 2 इकाई घटा दी जाए तो आयत का क्षेत्रफल $(l + 4) \times (b - 2)$ वर्ग इकाई होगा।

(iii) सरिता कहती है हम वस्तुएँ खरीदते हैं तो हमें गुणा करना पड़ता है। उदाहरणार्थ यदि प्रति किलो सेब का मूल्य ₹x है और विद्यालय पिकनिक के लिए z किलोग्राम सेब की आवश्यकता है तो हमें ₹$(x \times z)$ का भुगतान करना होगा।

यदि प्रति किलोग्राम सेब ₹5 को वृद्धि हो जाए और पिकनिक के लिए 2 किलोग्राम कम सेब की आवश्यकता हो तो हमें ₹$(x + 5)\ (z - 2)$ का भुगतान करना पड़ेगा।

© JCERT not to be republished

6.7 बहुपदों का गुणा

6.7.1. दो एकपदियों का गुणा

हम पहले सीख चुके हैं,

$$4 \times x = x + x + x + x = 4x$$

$$5 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x + 5x = 15x$$

अब, निम्नलिखित गुणनफलों पर विचार करते हैं।

(i) $x \times 4y = x \times 4 \times y = 4 \times x \times y = 4xy$

(ii) $2x \times 7y = 2 \times x \times 7 \times y = 2 \times 7 \times x \times y = 14xy$

(iii) $6y \times (-2x) = 6 \times y \times (-2) \times x$

$= 6 \times (-2) \times x \times y = -12xy$

इसे हम कुछ और उपयोगी उदाहरण द्वारा समझते हैं।

(iv) $7x \times 5x^3 = (7 \times 5) \times (x \times x^3)$

$= 35 \times x^3$

$= 35x^3$

यहाँ $7 \times 5 = 35$

अर्थात् गुणनफल का गुणक = प्रथम एक पदों का गुणांक × द्वितीय एक पदों का गुणांक

और $x \times x^3 = x^4$

अर्थात् गुणनफल का बीजीय गुणनखंड

= प्रथम एक पदों का बीजीय गुणनखंड × द्वितीय एकपदी का बीजीय गुणनखंड

(v) $6x \times (-8x^2yz) = 6 \times (-8) \times (x \times x^2 \times y \times z)$

$= -48 \times (x \times x^2 \times yz)$

$= -48x^3yz$

(vi) $4lm \times m^3 \times (-5l^4) = 4 \times (-5) \times (lm \times m^3 \times l^4)$

$= -20 \times (l \times l^4 \times m \times m^3)$

$= -20l^5m^4$

© JCERT not to be republished

आइए दो एकपद के गुणन का एक गुणन सारणी बनाते हैं—

X	x	$-4x^2y$	$7y$
xy	x^2y	$-4xy^2$	$7xy^2$
$-2xy^3$	$-2x^2y^3$	$8x^3y^4$	$-14xy^4$

प्रयास कीजिए—

1. निम्न एकपद को गुणा कीजिए।

   (i) $7x$ और $5x^2y$ (ii) $-4xy$ और xy^2

   (iii) $2p^2q^2$ और pq (iv) $3m^2n$ और $-2mn^2$

   (v) $4x, -7xy$ और 0

2. निम्न एकपदी व्यंजकों का गुणाकर गुणनफल का गुणांक लिखिए।

   (i) $7xy, x^2$ और $-y$ (ii) lm, m^2n^2 और $\frac{7}{2}l$

   (iii) $a^2b^2, -ab$ और $-\frac{1}{2}ab^2$ (iv) x^2y^3, xy^2 और x^3y

3. गुणन सारणी को पूरा कीजिए—

X	x	x^2y	xy^2
$4x$			
$-5x^2y^2$			

6.7.2. एकपदी को बहुपदी से गुणा

हम संख्याओं के वितरण गुणा को जानते हैं—

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

यह नियम के द्वारा हम एक पद का द्विपदी, त्रिपदी का बहुपदों के साथ गुणा आसानी में कर सकते हैं।

आइए, $7x$ को $4x - 2y$ के गुणा करते हैं।

$$7x \times (4x - 2y) = 7x \times 4x - 7x \times 2y$$
$$= 28x^2 - 14xy$$

© JCERT not to be republished

एक पद $7x$ को द्विपद के प्रत्येक पद $4x$ एवं $2y$ से गुणा करते हैं।

उदाहरण 6. $-9xy^2$ को $(4x^2 - 5xy)$ से गुणा कीजिए।

हल : $$-9xy^2 \times (4x^2 - 5xy) = -9xy^2 \times 4x^2 - (-9 \times y^2) \times 5xy$$
$$= -36x^3y^2 - (-45x^2y^3)$$
$$= -36x^3y^2 + 45x^2y^3.$$

उदाहरण 7. $5x^2y^2$ को $(6x - 2xy - 1)$ से गुणा कीजिए।

हल : $$5x^2y^2 \times (6x - 2xy - 1) = 5x^2y^2 \times 6x - 5x^2y^2 \times 2xy - 5x^2y^2 \times 1$$
$$= 30x^3y^2 - 10x^3y^3 - 5x^2y^2.$$

6.7.3. द्विपदी को द्विपदी से गुणा करना

हम यहाँ द्विपदी $(a + b)$ और $c + d$ के गुणन पर विचार करते हैं।

$$(a + b) \times c + d = a \times (c + d) + b \times (c + d)$$
$$= a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$
$$= ac + ad + bc + bd$$

वितरण नियम के अनुसार $(a + b)$ के प्रत्येक पद से $(c + d)$ के प्रत्येक पद को गुणा करते हैं।

उदाहरण 8. $(x - 7)$ को $(2x + 5)$ से गुणा कीजिए।

हल : $$(x - 7) \times (2x + 5) = x \times (2x + 5) - 7 \times (2x + 5)$$

(वितरण नियम से)

$$= 2x^2 + 5x - 14x - 35$$
$$= 2x^2 - 9x - 35$$ (समान पदों का घटाने पर)

उदाहरण 9. $(ab + 2b^2)$ को $(6a - 3a^2b^2)$ से गुणा कीजिए।

हल : $$(ab + 2b^2) \times (6a - 3a^2b^2) = ab \times (6a - 3a^2b^2) + 2b^2 \times (6a - 3a^2b^2)$$
$$= 6a^2b - 3a^3b^3 + 12ab^2 - 6a^2b^4$$

(सभी आसान पद है)

6.7.4. द्विपदी के त्रिपदी से गुणा

द्विपदी और त्रिपदी का गुणनफल करने में हम वितरण नियम का प्रयोग करेंगे। यहाँ भी द्विपद के प्रत्येक पद को त्रिपदी के प्रत्येक पद से गुणा करते हैं।

© JCERT not to be republished

हम $(a + 3b)$ और $(a^2 + 7ab - 5)$ के गुणन पर विचार करते हैं।

$$(a + 3b)(a^2 + 7ab - 5) = a \times (a^2 + 7ab - 5) + 3b(a^2 + 7ab - 5)$$

(वितरण नियम से)

$$= a^3 \times 7a^2b - 5a + 3a^2b + 21ab^2 - 15b$$

$$= a^3 + 10a^2b - 5a + 21ab^2 - 15b$$

[समान पदों को संकलित का जोड़ने पर]

उदहरण 10. $(x + 2y - 1)$ को $(2x - y)$ से गुणा कीजिए।

हल : $(x + 2y - 1) \times (2x - y) = (2x - y) \times (x + 2y - 1)$

[क्रम विनिमय नियम $a \times b = b \times a$]

$$= 2x \times (x + 2y - 1) - y \times (x + 2y - 1)$$

$$= 2x^2 + 4xy - 2x - xy - 2y^2 + y$$

$$= 2x^2 + 3xy - 2x - 2y^2 + y$$

[समान पदों को संकतित का जोड़ने पर]

जोड़ एवं घटाव की संक्रिया को तरह बहुपद के गुणन को की संक्रिया को स्तम्भ विधि से भी किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ : $4x - 3y$ को $x - y$ से गुणा

$4x - 3y$

$\times\ x - y$

$4x^2 - 3xy$ (x को $4x - 3y$ से गुणा करने पर)

$-4xy + 3y^2$ ($-y$ को $4x - 3y$ से गुणा करने परद्ध

$4x^2 - 7xy + 3y^2$ (समान पदों को संकूलित कर जोड़ने पर)

उदाहरण 11. स्तंभ विधि से व्यंजकों $6a^2 - 2ab - 7$ और $a - 2b$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $(6a^2 - 2ab - 7)(a - 2b)$

$= 6a^3 - 2a^2b - 7a - 12a^2b + 4ab^2 + 14b$ $[a \times (6a^2 - 2ab - 7)]$

$= 6a^3 - 14a^2b + 4ab^2 - 7a + 14b$ $[-2b \times (6a^2 - 2ab - 7)]$

© JCERT not to be republished

उदाहरण 12. व्यंजक $(2a + b)(7a - b - 2)$ को सरल कीजिए एवं $a = 2, b = -3$ के लिए व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$(2a + b)(7a - b - 2) = 2a \times (7a - b - 2) + b(7a - b - 2)$$
$$= 14a^2 - 2ab - 4a + 7ab - b^2 - 2b$$
$$= 14a^2 + 5ab - b^2 - 4a - 2b$$

$a = 2, b = -3$ के लिए

$$14a^2 + 5ab - b^2 - 2b = 14 \times (2)^2 + 5 \times (2) \times (-3) - (-3)^2 - 4 \times 2 - 2 \times (-3)$$
$$= 14 \times 4 + 5 \times (-6) - (9) - 8 + 6$$
$$= 56 - 30 - 9 - 8 + 6$$
$$= 62 - 47$$
$$= 15.$$

© JCERT not to be republished

प्रश्नावली 6.2

1. निम्न में प्रत्येक एक पदी युग्मों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

   (i) $4, 7x$ (ii) $-5x, 7y$ (iii) $4x^3, \frac{7}{4}y^2$

   (iv) $5x, y^2$ (v) $\frac{7}{4}xy \times 0$ (vi) $-2ab, 5a^2b$

2. निम्न में प्रत्येक युग्म आयत के लंबाई और चौड़ाई को (इकाई में) सूचित करता है। प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल (वर्ग इकाई) ज्ञात कीजिए—

   (i) $4a, 7b$ (ii) $\frac{4}{3}x, \frac{5}{2}y$ (iii) $15x^2y, 12xy$

   (iv) $4mn, 9m^2p$

3. प्रत्येक घनाभ का आयतन (घन इकाई में) ज्ञात कीजिए। जिनकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई (इकाई में) क्रमशः निम्नलिखित हैं—

   (i) $4x, 7x^2, 8x^4$ (ii) $ab, 3a^2b, 4ab$

   (iii) $2a, 3b, 9c$ (iv) $4xyz, 2x^2y, 9x^2y^2z$

   (v) $a^2bc, 4ab^2c, 7abc^2$

4. योगफल ज्ञात कीजिए—

(i) $2a(7-5a)$ एवं $4a^2-7a+6$

(ii) $9x(2x^2-x+7)$ एवं $5(x^3-2x+7)$

5. (i) $4x(2x-y+5z)$ में से $3y(4x-2y+7z)$ को घटाइए।

(ii) $2a(3a+b-c)$ में से $5a(2a-b+7c)$ को घटाइए।

6. गुणा कीजिए—

(i) $(2x+4y)\times(4x-7y)$

(ii) $(7a+5)\times(2a+b)$

(iii) $(8p-2q)\times(4p-7q)$

(iv) $(2a^2+7b^2)\times(a-5b)$

(v) $(5x+2y)\times(x-2y+3z)$

(vi) $(2a-3b+4c)+(a+5b-2c)$

7. सरल कीजिए—

(i) $(3a+2b)(4a-b+3c)+(5a-2b)c$

(ii) $(x^2-6)(x+4)+16$

(iii) $(p-q)(p+q)$

(iv) $(x+2y)(7x-y+5)+x^2(x-2y)$

8. निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक को सरल कीजिए और अज्ञात राशि के दिए गए मान के लिए व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए—

(i) $4a(a-2b),\ a=4,\ b=1$

(ii) $(a+3b)4-2a,\ a=1,\ b=-2$

(iii) $x(2x-y)+3(x+2y),\ x=2,\ y=3$

(iv) $x(3x-4)+4(x-7)+x(7-2x),\ x=4$

9. नीचे दिए गए गुणन सारणी को भरिए—

X	$2a$	$4b$	$-3c$	$7a^2bc$
$3a$				
$4ab$				
$7c$				
$-4a^2b$				

© JCERT not to be republished

6.8. सर्वसमिकाएँ (Identities)

समिका $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$ में चर का माना 4 रखने पर हम पाते हैं।

$$\text{बायाँ पक्ष (LHS)} = (x + 2)(x + 3)$$
$$= (4 + 2)(4 + 3)$$
$$= 6 \times 7 = 42$$
$$\text{दायाँ पक्ष (RHS)} = x^2 + 56 + 6$$
$$= (4)^2 + 5 \times 4 + 6$$
$$= 16 + 20 + 6$$
$$= 42$$

अतः $x = 4$ के लए समिका का दोनों पक्षों का मान समान है।

अब हम $x = -1$ लेते हैं।

$$\text{LHS} = (-1 + 2)(-1 + 3)$$
$$= (1)(2) = 2$$
$$\text{RHS} = (-1)^2 + 5(-1) + 6$$
$$= 1 - 5 + 6$$
$$= 7 - 5 = 2$$

अतः $x = -1$ के लिए भी LHS = RHS है।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि x के किसी भी मान के लिए, इस समिका LHS = RHS है।

ऐसी समिका जो चर के सभी मानों के लिए सत्य होती है, सर्वसमिका कहलाती है।

इस प्रकार $(x + 2)(x + 3)^2 = x^2 + 5x + 6$ एक सर्वसमिका है।

एक समकोण अपने चर के केवल कुछ निश्चित मानों के लिए ही सत्य होता है, यह चर के सभी मानों के लिए सत्य नहीं होता है।

उदाहरणार्थ—$x^2 - x + 2 = 8$ की चर्चा करते है।

यदि $x = -2$, $\quad \text{LHS} = (-2)^2 - (-2) + 2$
$$= 4 + 2 + 2 = 8$$

© JCERT not to be republished

$x = 3,$ $\qquad$ LHS $= (3)^2 - 3 + 2$

$= 9 - 3 + 2$

$= 11 - 3 = 8$

$x = 1$ $\qquad$ LHS $= 12 - 1 + 2 = 1 - 1 + 2$

$= 3 - 1 = 2$

यहाँ समीकरण $x = -2$ और 3 के लिए सत्य है किन्तु $x = 1$ के सत्य नहीं है।

समीकरण जिस बात का होता है वह उतने ही विभिन्न चर मान के लिए सत्य होता है।

6.9 कुछ मानक सर्वसमिकाएँ

कुछ ऐसी सर्वसमिकाएँ जिनका बीजगणित के अध्ययन में हमेशा उपयोग होता है, उन्हें मानक सर्वसमिकाएँ कहा जाता है।

(i) $\qquad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

हम जानते हैं,

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= a(a + b) + b(a + b)$$
$$= a^2 + ab - ba + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 \qquad [\because ba = ab]$$

(ii) $\qquad (a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

हम जानते हैं,

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$
$$= a(a - b) - b(a - b)$$
$$= a^2 - ab - ba + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

(iii) $\qquad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

हम जानते हैं,

$$(a + b)(a - b) = a(a + b) + b(a - b)$$

© JCERT not to be republished

$$= a^2 - ab + ba - b^2$$

$$= a^2 - b^2 \qquad [\because ab = ba]$$

(iv) $$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

हम जानते हैं,

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$$

$$= x^2 + bx + ax - ab$$

$$= x^2 + ax + bx + ab$$

$$= x^2 + x(a + b) + ab$$

उदाहरण 13. सर्वसमिका का उपयोग कर (i) $(2x + 5y)^2$, (ii) $(105)^2$, (iii) $(97)^2$, (iv) $(120)^2$ को सरल कीजिए।

हल :

(i) $$(2x + 5y)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5y + (5y)^2$$

$$= 4x^2 + 20xy + 25y^2$$

[सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ से]

(ii) $$(105)^2 = (100 + 5)^2$$

$$= 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + (5)^2$$

$$= 10000 + 1000 + 25$$

$$= 11025.$$

(iii) $$(97)^2 = (100 - 3)^2$$

$$= (100)^2 - 2 \times 100 \times 3 + (3)^2$$

$$= 10000 - 600 + 9$$

$$= 10009 - 600$$

$$= 9409.$$

(iv) $$(120)^2 = (100 + 20)^2$$

$$= (100)^2 + 2 \times 100 \times 20 + (20)^2$$

$$= 10000 + 4000 + 400$$

$$= 14400$$

© JCERT not to be republished

उदाहरण 14. सर्वसमिका का उपयोग कर (i) $(2x - 7y)^2$, (ii) $\left(\frac{7}{2}x - \frac{2}{3}y\right)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

(i) $$(2x - 7y)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7y + (7y)^2$$

[सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$]

$$= 4x^2 - 28xy + 49y^2$$

(ii) $$\left(\frac{7}{2}x - \frac{2}{3}y\right)^2 = \left(\frac{7}{2}x\right)^2 - 2 \times \frac{7}{2}x \times \frac{2}{3}y + \left(\frac{2}{3}y\right)^2$$

$$= \frac{49}{4}x^2 - \frac{14}{3}xy + \frac{4}{9}y^2$$

उदाहरण 15. सर्वसमिका का उपयोग कर निम्न का गणनफल ज्ञात कीजिए—

(i) $(2a - 3b)(2a + 3b)$

(ii) $(4a^2 + 7ab)(4a^2 - 7ab)$

हल :

(i) $$(2a - 3b)(2a + 3b) = (2a)^2 - (3b)^2$$

[सर्वसमिका $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ से]

$$= 4a^2 - 9b^2$$

(ii) $$(4a^2 + 7ab)(4a^2 - 7ab) = (4a^2)^2 - (7ab)^2$$

$$= 16a^4 - 49a^2b^2$$

उदाहरण 16. सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का उपयोग कर निम्न का मान ज्ञात कीजिए—

(i) $(x + 4)(x + 7)$ (ii) $(2x + 1)(2x - 9)$

(iii) $(8x - 7)(8x - 5)$ (iv) $(2x^2 + 5)(2x^2 + 7)$

(iv) $(102) \times (107)$ (v) $(96)(105)$

हल :

(i) $$(x + 4)(x + 7) = x^2 + x(4 + 7) + 4 \times 7$$

$$= x^2 + x(11) + 28$$

© JCERT not to be republished

$= x^2 + 11x + 28$

(ii) $(2x + 1)(2x - 9) = (2x + 1)[2x + (-9)]$

$= (2x)^2 + 2x(1 + (-9)] + 1 \times (-9)$

$= 4x^2 + 2x(1 - 9) - 9$

$= 4x^2 + 2x(-8) - 9$

$= 4x^2 - 16x - 9$

(iii) $(8x - 7)(8x - 5) = [8x + (-7)][8x + (-5)]$

$= (8x)^2 + 8x[(-7) + (-5)] + (-7) \times (-5)$

$= 64x^2 + 8x[-7 - 5] + 35$

$= 64x^2 + 8x(-12) + 35$

$= 64x^2 - 96x + 35$

(iv) $(2x^2 + 5)(2x^2 + 7) = (2x^2)^2 + 2x^2(5 + 7) + 5 \times 7$

$= 4x^4 + 2x^2(12) + 35$

$= 4x^4 + 24x^2 + 35$

(v) $102 \times 107 = (100 + 2)(100 + 7)$

$= (100)^2 + 100(2 + 7) + 2 \times 7$

$= 10000 + 100(9) + 14$

$= 10000 + 900 + 14$

$= 10914.$

(vi) $96 \times 105 = (100 - 4)(100 + 5)$

$= [100 + (-4)](100 + 5)$

$= (100)^2 + 100[(-4) + 5] + (-4) \times 5$

$= 10000 + 100(1) - 20$

$= 10000 + 100 - 20$

$= 10100 - 20$

$= 10080.$

© JCERT not to be republished

उदाहरण 17. सरल कीजिए—

(i) $(3a + 7)^2 - (3a - 7)^2$

(ii) $(xy + yz)^2 - 2xy^2z$

हल :

(i) $$(3a + 7)^2 - (3a - 7)^2 = (3a)^2 + 2 \times 3a \times 7 + (7)^2 - [(3a)^2 - 2 \times 3a \times 7 + (7)^2]$$

$$= 9a^2 + 42a + 49 - [9a^2 - 42a + 49]$$

$$= 9a^2 + 42a + 49 - 9a^2 + 42a - 49$$

$$= 84a.$$

(ii) $$(xy + yz)^2 - 2xy^2z = (xy)^2 + 2 \times xy \times yz + (yz)^2 - 2xy^2z$$

$$= x^2y^2 + 2xy^2z + y^2z^2 - 2xy^2z$$

$$= x^2y^2 + y^2z^2.$$

उदाहरण 18. सिद्ध कीजिए—

(i) $(4a + 3)^2 - 48a = (4a - 3)^2$

(ii) $(a - b)(a + b) + (b + c)(b - c) + (c - a)(c + a) = 0$

हल :

(i) $$\text{L.H.S.} = (4a + 3)^2 - 48a$$

$$= (4a)^2 + 2 \times 4a \times 3 + (3)^2 - 48a$$

$$= 16a^2 + 24a + 9 - 48a$$

$$= 16a^2 - 24a + 9$$

$$= (4a)^2 - 2 \times 4a \times 3 + (3)^2$$

$$= (4a - 3)^2 = \text{R.H.S.}$$

(ii) $(a - b)(a + b)(b + c)(b - c) + (c - a)(c + a)$

$$= a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2$$

$$= 0 = \text{R.H.S.}$$

© JCERT not to be republished

प्रश्नावली 6.3

1. सर्वसमिका का उपयोग का निम्न वर्गों क मान ज्ञात कीजिए—
   (i) $(4x + 3y)^2$ (ii) $(ab + 2c)^2$
   (iii) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y\right)^2$ (iv) $(2ab + 6b)^2$
   (v) $(0.4x + 0.7y)^2$ (vi) $(3xy + 7yz)^2$
2. सर्वसमिका का उपयोग कर निम्न वर्गों का मान ज्ञात कीजिए—
   (i) $(4x – 7y)^2$ (ii) $(2a^2 – 3b)^2$
   (iii) $\left(\frac{7}{2}x-\frac{2}{7}y\right)^2$ (iv) $(3ab – 2b)^2$
   (v) $(0.6x – 0.2y)^2$ (vi) $(2xy – yz)^2$
3. सरल कीजिए—
   (i) $(x – 2) (x + 2)$ (ii) $(2a –3b) (2a + 3b)$
   (iii) $(7a^2 + 2ab) (7a^2 – 2ab)$ (iv) $(0.2a + 0.9b) (0.2a – 0.9b)$
4. सर्वसमिकना का प्रयोग का प्रत्येक का गुणनफल ज्ञात कीजिए—
   (i) $(a + 4) (a + 8)$ (ii) $(2x + 7) (2x + 9)$
   (iii) $(3x + 7) (3x – 6)$ (iv) $(2x^2 – 6) (2x^2 – 9)$
   (v) $(8a^2 – 2b^2) (a + 2b^2)$ (vi) $(8xy + z) (8xy – 3z)$
5. सर्वसमिका का प्रयोग कर प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए—
   (i) $(106)^2$ (ii) $(96)^2$
   (iii) $(110)^2$ (iv) 109×102
   (v) 104×97 (vi) $(107)^2 – (93)^2$
6. सरल कीजिए—
   (i) $(8a – 2b)^2 + 90ab$ (ii) $(3x – 2y)^2 + (3x + 2y)^2$
   (iii) $(4a + 2b)^2 – (4a – 2b)^2$ (iv) $(8x^2 + 7y^2)^2 – 112x^2y^2$
7. सिद्ध कीजिए—
   (i) $(4p – 7)^2 + 11p = (4p + 7)^2$

© JCERT not to be republished

(ii) $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}b\right)^2-2ab=\frac{4}{9}a^2+\frac{9}{4}b^2$

(iii) $(8x^3-4)^2-(8x^3+4)^2=-128x^3$

(iv) $(4ab+3b)^2-(4ab-3b)^2=48ab^2$

उत्तरमाला 6.1

1. एक पद – (ii), (ii)

   द्विपद – (i), (iv), (vii)

   त्रिपद – (v), (vi), (viii)

2. [(i) एवं (iii)], [(ii), (v) और (viii)], [(iv), (vi) एवं (viii)]

3. (i) $\frac{7}{2}$, (ii) -5, (iii) 9, (iv) $\frac{-5}{9}$,

   (v) 12, (vi) -1, (vii) 4, (viii) 9

4. (i) $5x+20$ (ii) $-7x+13$ (iii) $3x^2$

5. (i) $5x^2-x-2$ (ii) $-a^2+2b^2-c^2$

   (iii) $5x^2-\frac{5}{4}x+\frac{1}{3}$ (iv) $x^2+y^2+z^2+4xy-4yz$\

   (v) $5ab-2abc+4a-3b$

6. (i) $16a-16bc+23ca$ (ii) $8a^2-5a+11$

   (iii) $t^3+4t^2-10t+10$ (iv) $16x^4-10x^2-11$

   (v) $16x^4-3x^3-6x^2+4x-1$

7. (i) 10 (ii) -0.4

8. $-3y^4-2y^3+8y+7$

उत्तरमाला 6.2

1. (i) $28x$ (ii) $-35xy$ (iii) $7x^3y^2$ (iv) $5xy^2$

   (v) 0 (vi) $-10a^3b^2$

© JCERT not to be republished

2. (i) $28ab$ वर्ग इकाई (ii) xy वर्ग इकाई

(iii) $180x^3y^2$ वर्ग इकाई (iv) $36m^3np$ वर्ग इकाई

3. (i) $224x^7$ घन इकाई (ii) $12a^4b^3$ घन इकाई

(iii) $54abc$ घन इकाई (iv) $72x^5y^4z^2$ घन इकाई

(v) $28a^4b^4c^4$ घन इकाई

4. (i) $-6a^2 + 7a + 6$ (ii) $23x^3 - 9x^2 + 53x + 3$

5. (i) $8x^2 - 16xy + 6y^2 + 20zx - 21yz$ (ii) $-4a^2 + 7ab - 37ca$

6. (i) $8x^2 + 2xy - 28y^2$ (ii) $14a^2 + 12ab + 5b$

(iii) $32p^2 - 64pq + 14q^2$ (iv) $8a^3 - 10a^2b + 28ab^2 - 35b^3$

(v) $5x^2 - 8xy + 15zx - 4y^2 + 6yz$ (vi) $2a^2 - 15b^2 - 8c^2 + 7ab + 26bc$

7. (i) $12a^2 - 2b^2 + 5ab + 14ca + 4bc$ (ii) $x^3 + 4x^2 - 6x - 8$

(iii) $p^2 - q^2$ (iv) $7x^2 - 2y^2 - xy + 5x + 14xy + 10y$

8. (i) 32 (ii) – 22 (iii) 26 (iv) 16

9.

X	$2a$	$4b$	$-3c$	$7a^2bc$
$3a$	$6a^2$	$12ab$	$-9ca$	$21a^3bc$
$4ab$	$8a^2b$	$16ab^2$	$-12abc$	$28a^3b^3c$
$7c$	$14ca$	$28bc$	$-21c^2$	$49a^2bc^2$
$-4a^2b$	$-8a^3b$	$-16a^2b^2$	$12a^2bc$	$-28a^4b^2c$

उत्तरमाला 6.3

1. (i) $16x^2 + 24xy + 9y^2$ (ii) $a^2b^2 + 4abc + 4c^2$

(iii) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{5}xy + \frac{9}{25}y^2$ (iv) $4a^2b^2 + 24ab^2 + 36b^2$

(v) $0.16x^2 + 0.56xy + 0.49y^2$ (vi) $9x^2y^2 + 42xy^2z + 49y^2z^2$

2. (i) $16 - 56xy + 49y^2$ (ii) $4a^4 - 12a^2b + 9y^2$

(iii) $\frac{49}{4}x^2 - 2xy + \frac{4}{9}y^2$ (iv) $9a2b^2 - 12ab^2 + 4b^2$

(v) $0.36x^2 - 0.24xy + 0.04y^2$ (vi) $4x^2y^2 - 4xy^2z + y^2z^2$

3. (i) $x^2 - 4$ (ii) $4a^2 - 9b^2$ (iii) $4a^4 - 4a^2b^2$ (iv) $0.04a^2 - 0.81b^2$

© JCERT not to be republished

4. (i) $a^2 + 12a + 32$ (ii) $4x^2 + 32a + 63$

(iii) $9x^2 + 3x - 42$ (iv) $4x^3 - 30x^2 + 54$

(v) $a^2 - 4b^4$ (vi) $64x^2y^2 - 16xyz - 3z^2$

5. (i) 11236 (ii) 9216 (iii) 12100 (iv) 11118

(v) 10088 (vi) 2800

6. (i) $64a^2 + 58ab + 4b^2$ (ii) $18x^2 + 8y^2$

(iii) $32ab$ (iv) $64x^4 + 49y^2$

© JCERT not to be republished