06
अध्याय

परिक्षेपण का माप

6.1 प्रस्तावना

पिछले दो अध्यायों में हमने औसत (Average) या केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों का अध्ययन किया है। एक श्रृंखला की केन्द्रीय प्रवृत्ति या औसत एक प्रतिनिधि मूल्य है और इसलिए श्रृंखला के विभिन्न मूल्यों का प्रतिनिधित्व करती है। परन्तु एक औसत यह नहीं बता पाता कि एक श्रृंखला के विभिन्न मदों में कितना अन्तर है। इसलिए औसत की जानकारी प्राप्त करने के साथ–साथ यह ज्ञान प्राप्त करना भी जरूरी हो जाता है कि किसी श्रृंखला के विभिन्न मदों में आपस में कितना अन्तर है तथा माध्य से कितना अन्तर है।

- एक माध्य एक श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है। इसलिए केन्द्रीय मूल्यों को प्रथम श्रेणी का माध्य भी कहा जाता है।
- परन्तु विभिन्न माध्यों के अध्ययन करने के बाद भी हमें समंक श्रेणी की संरचना, बनावट, फैलाव विस्तार आदि की जानकारी प्राप्त नहीं होती है इसलिए यह ज्ञात करने के लिए अपकिरण के माप ज्ञात किये जाते है।
- इसलिए सिम्पसन एवं काफ्का ने सही कहा है कि– एक अकेला माध्य पूरी कहानी नहीं बता सकता है क्योंकि समंक श्रेणी का औसत मूल्य माध्य होता है जो समंक श्रेणी का केन्द्रीय मूल्य, प्रतिनिधित मूल्य होता है। अर्थात् समंक श्रेणी के व्यक्तिगत मूल्य के बारे में अवगत नहीं करा सकते है अर्थात् माध्य समंक श्रेणी की बनावट संरचना फैलाव विस्तार आदि के बारे में स्पष्ट जानकारी प्रदान नहीं करा पाते है।

उदाहरण :

एक कॉलेज में 3 दोस्त राम, श्याम और सुन्दर तीनों एक दिन केन्टिन में बैठे थे और अपने परिवार की मासिक आय के बारे में चर्चा कर रहे थे। तीनों के परिवारों में आय का अर्जन करने वाले पांच व्यक्ति हैं जिनका विवरण निम्न प्रकार है–

व्यक्ति	राम परिवार	श्याम परिवार	सुंदर परिवार
A	10000	12500	4000
B	10000	10000	16000
C	10000	7500	10000
D	10000	15000	13000
E	10000	5000	7000
TOTAL	50000	50000	50000
औसत	10000	10000	10000

© JCERT not to be republished

तालिका में स्पष्ट है कि समांतर माध्य तथा माध्यिका तीनों परिवारों में समान है अर्थात ₹10000। परंतु आसानी से देखा जा सकता है कि राम का परिवार में प्रत्येक व्यक्ति को समान वेतन मिल रहा है अर्थात् कोई विचरण (variation) नहीं है। श्याम के परिवार परिवार को प्राप्त होने वाले वेतन में विचरण कम है (अर्थात् न्यूनतम तथा अधिकतम)। जबकि सुंदर के परिवार को मिलने वाले वेतन में विचरण अधिक है अर्थात्, न्यूनतम वेतन ₹4000 तथा अधिकतम वेतन ₹16000। अतः हम कह सकते हैं कि औसत वितरण का सही तस्वीर प्रस्तुत नहीं करता इन विभिन्न परिस्थितियों का विश्लेषण करने के लिए हमारे पास एक अन्य सांख्यिकी विधि है जिसे हम परिक्षेपण की माप कहते हैं।

6.2.1 परिक्षेपण के माप से तात्पर्य –

- श्रेणी के माध्य से लिए गए पदों के विचलनों के औसत से है।
- अपकिरण परिक्षेपण (DISPERSION) को फैलाव बिखराव प्रसार आदि के नाम से जाना जाता है।
- अपकिरण को द्वितीय श्रेणी के माध्य भी कहते है क्योंकि इसमें श्रेणी से निकाले गये माध्यों का पद / चर मूल्य से विचलन (अन्तर) ज्ञान करके माध्य (औसत) ज्ञात किया जाता है, इसलिए इसे द्वितीय श्रेणी का माध्य भी कहते है।

6.2.2 परिक्षेपण माप के उद्देश्य –

(1) **माध्य से औसत दूरी ज्ञात करना** (Knowing Variation from Average) — अपकिरण का पहला उद्देश्य समंक श्रेणी के माध्य से विभिन्न पद मूल्यों की औसत दूरी ज्ञात करना होता है।

(2) **माध्य की विश्वसनीयता का अनुमान** (Testing the Reliability of the Average) — अपकिरण का माप हमें यह भी बताता है कि श्रेणी का माध्य किस सीमा तक श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है।

(3) **श्रेणी की रचना का ज्ञान** (Knowledge of Composition of Series) — अपकिरण की मापों द्वारा श्रेणी की बनावट के सम्बन्ध में महत्वपूर्ण जानकारी प्राप्त हो जाती है। इससे हमें यह जानकारी हो जाती है कि माध्य के दोनों ओर मूल्यों का फैलाव या बिखराव किस प्रकार का है।

(4) **दो या अधिक श्रेणियों की तुलना** (Comparison of Two or more Series) — अपकिरण की मापों के आधार पर दो या अधिक श्रेणियों के मध्य विचरणशीलता की तुलना आसानी से की जा सकती है। अत्यधिक विचरण का अर्थ है एकरूपता या समानुरूपता का अभाव, जबकि अल्प विचरण का अर्थ है एकरूपता की उपस्थिति।

(5) **उच्च सांख्यिकीय विश्लेषण में सहायक** (Helpful for Higher Statistical Analysis) — अपकिरण की माप अन्य सांख्यिकीय मापों, जैसे – विषमता, पृथुशीर्षत्व, सहसम्बन्ध, प्रतीपगमन आदि में भी सहायक है।

श्रृंखला के परिक्षेपण तथा औसत में क्या अन्तर है ?

किसी श्रृंखला के औसत से अभिप्राय उसकी केन्द्रीय प्रवृत्ति से है। यह श्रृंखला की सभी मदों के व्यवहार का प्रतिनिधित्व करता है परन्तु विभिन्न मदों में एक–दूसरे से तथा औसत से विभिन्न होने की प्रवृत्ति पाई जाती है। प्रभावीकरण इनके अन्तर के विस्तार को मापता है। अन्य शब्दों में परिक्षेपण विभिन्न मदों तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति के बिखराव के विस्तार को मापता है।

© JCERT not to be republished

परिक्षेपण के माप का आधारभूत उद्देश्य क्या है?

इसका मुख्य उद्देश्य केन्द्रीय प्रवृत्ति या औसत मूल्य से श्रृंखला की विभिन्न मदों के अन्तर के विस्तार को माप कर श्रृंखला की संरचना का ज्ञान प्राप्त करना है।

6.2.1 अपकिरण के माप –

(1) सापेक्ष माप (Relative measurement)

(2) निरपेक्ष माप (Absolute measurement)

(1) सापेक्ष माप : सापेक्ष माप का प्रयोग दो या दो से अधिक श्रेणियों की तुलना करने के लिये किया जाता है। यह एक प्रकार तुलनात्मक माप होता है जिसे अनुपात या प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

(2) निरपेक्ष माप : निरपेक्ष माप के प्रयोग– यह माप अपकिरण की मात्रा को व्यक्त करते है तथा इसे उसी इकाई में व्यक्त किया जाता है। जिसमें प्रश्न में दिया हुआ होता है। जैसे लीटर, मीटर, वर्ष आदि।

6.2.2 अपकिरण के माप

नापने की विधियां –

निरपेक्ष माप	सापेक्ष माप
1,परास या विस्तार (Range)	1, विस्तार गुणांक(coefficient of range)
2, चतुर्थक विचलन, अंतर चतुर्थक विस्तार (Quarti Deviation] Inter – Quartile Range)	2,चतुर्थक विचलन गुणांक (coefficient of quartile deviation)
3, माध्य विचलन (Mean Deviation)	3, माध्य विचलन गुणांक(coefficient of mean deviation)
4, प्रमाप विचलन (Standard Deviation)	4, प्रमाप विचलन गुणांक(coefficient of standard deviation)
5, लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)	

6.2.2a 1. **परास या विस्तार (Range) : विस्तार को चिह्न "R" से दर्शाते हैं।**

- किसी समंक (आंकड़ों) माला के सबसे बड़े और सबसे छोटे पदों के मूल्यों के अन्तर को विस्तार कहते हैं।
- विस्तार जब कम होता है तो श्रेणी को नियमित श्रेणी कहते हैं जबकि विस्तार अधिक होने पर श्रेणी अनियमित कही जाती है।
- यह अपकिरण ज्ञात करने की सरलतम रीति है।

© JCERT not to be republished

व्यक्तिगत श्रेणी में विस्तार की गणना :

सूत्र, R = H – L

" R " (Range) निरपेक्ष माप है जहां H = उच्च मूल्य तथा L = निम्न मूल्य दर्शाता है।

परास गुणांक (coefficie of range] या CR) का सूत्र = Co- of R = H - L / H + L

अर्थात्,

विस्तार गुणांक (Coefficient of Range) – जोकि विस्तार का साक्षेप माप है, निम्न सूत्रों के प्रयोग द्वारा प्रप्त किया जा सकता है :

$$\text{विस्तार गुणांक} = \frac{\text{अधिकतम मूल्य – न्यूनतम मूल्य}}{\text{अधिकतम + न्यूनतम मूल्य}} \quad \text{अर्थात्} \quad \frac{L - S}{L + S}$$

उदाहरण – निम्न समंको से विस्तार अपकिरण तथा उसके गुणांक का निर्धारण कीजिए ।

मजदूरी (रूपयों) 40, 60, 55, 88, 100, 75, 80, 45, 70

हल : (1) विस्तार =अधिकतम मूल्य – न्यूनतम मूल्य

या, I R = H – L

हल – = 100–40

= 60

6.2.2b (2) विस्तार गुणांक(CO- of R) = H–L / H + L

$$= \frac{100 - 40}{100 + 40}$$

= 60/40 = 0.43

6.2.3 खंडित श्रेणी में विस्तार की गणना –

- खंडित श्रेणी में विस्तार याद करने में आकृतियों पर ध्यान नहीं दिया जाता केवल पद मूल्य के आधार पर ही विस्तार तथा विस्तार गुणांक ज्ञात किया जाता है। (सूत्र वही होगा जो व्यक्तिगत श्रेणी में प्रयोग किए गए हैं)

उदाहरण – निम्नलिखित आंकड़ों से विस्तार तथा विस्तार गुणांक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक (x)	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थियों की संख्या (f)	2	3	10	5	4	1

हल – जहां, H = 10, L = 05

1, Range R = H – L

= 10 – 05

© JCERT not to be republished

= 05

6.2.4 2. विस्तार गुणांक की गणना(CR)

CR = H – L / H + L

$$= \frac{H - L}{H + L} \qquad \frac{10 - 5}{10 + 5}$$

6.2.5 (ब) अखंडित या सतत श्रेणी में विस्तार की गणना –

- इसमें विस्तार की गणना में आकृतियों को ध्यान में नहीं रखा जाता है।
- समावेशी श्रेणी को अपवर्जी श्रेणी में परिवर्तित किया जाता है। (सूत्र वही प्रयोग होता है जो व्यक्तिगत श्रेणी के लिए किया जाता है।)

उदाहरण –

निम्न सतत् श्रेणी में विद्यमान विस्तार अपकिरण एवं उसके गुणांक का निर्धारण कीजिए।

वजन, kg	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160
आवृत्ति	5	10	20	15	8	5

1, विस्तार की गणना –

R = H – L

= 160 – 100

= 60

2, विस्तार गुणांक की गणना –

$$\text{CO of R} = \frac{H - L}{H + L} = \frac{160 - 100}{100 + 100}$$

6.2.5a विस्तार के गुण

1. विस्तार की गणना करना तथा इसे समझना बहुत सरल है।
2. यह स्थिर रूप से परिभाषित है।
3. इसकी गणना श्रेणी के सभी पदों पर निर्भर नहीं करती।
4. इसका गुण नियंत्रण संबंधी कार्यों में प्रयोग अधिक लाभदायक है। विस्तार के आधार पर नियंत्रण चार्ट तैयार किए जाते हैं। यदि उत्पादित वस्तुओं की क्वालिटी, चार्ट में दिए गए विस्तार के अनुसार है तो उत्पादन प्रक्रिया को नियंत्रण में माना जाएगा अन्यथा नहीं माना जाएगा। इस प्रकार ब्याज की दर, विनिमय दर, शेयर कीमतों आदि में होने वाले परिवर्तन को मापने के लिए विस्तार का प्रयोग सामान्य रूप से किया जाता है।

6.2.5b विस्तार के दोष

1. अस्थिर – विस्तार किसी श्रृंखला का स्थिर माप नहीं है। यह सीमांत मानों पर निर्भर करता है। इसमें होने वाले परिवर्तन का विस्तार पर तुरंत प्रभाव पड़ता है।

© JCERT not to be republished

2. सभी मूल्यों पर आधारित ना होना – विस्तार श्रृंखला के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होती है। इसमें सभी मूल्यों को महत्व नहीं दिया जाता।

3. श्रेणी की संरचना का ज्ञान नहीं होना – इसमें श्रृंखला की बनावट एवं आकार का ठीक से ज्ञान नहीं होता है, हो सकता है कि दो श्रृंखलाओं का विस्तार बराबर हो परंतु उनकी आकृति में अंतर हो।

4. खुले सिर वाले आवृत्ति वितरण के लिए उपयोगी ना होना – खुले सिर वाले आवृत्ति वितरण की स्थिति में विस्तार की गणना नहीं की जा सकती। अतः इस स्थिति के लिए विस्तार अनुपयुक्त होता है।

पाठगत प्रश्न

1. उत्तम और न्यूनतम चमक मूल्य का अंतर है –

A. विचलन अंतर B. चतुर्थक विस्तार

C. विस्तार D. विचलन गुणांक

2. एक अन्वेषक ने निम्नांकित निर्देशक समंक एकत्र किए जिनका निदेशक माध्य 5 है – 3, 5, 12, 3, 2 विस्तार है–

A. 1 B. 2

C. 10 D. 12

उत्तर : 1– C, 2–D ।

6.6.1 अन्तर चतुर्थक विचलन (INTER QUARTILE RANGE) –

किसी श्रृंखला के तृतीय चतुर्थक (Q3) तथा प्रथम चतुर्थक (Q1) अंतर को अंतर चतुर तक विस्तार कहते हैं। अर्थात्,

अंतर चतुर्थक विस्तार (I. R.) = Q3 – Q1

विस्तार की तरह अंतर चतुर्थक विस्तार भी अपकिरण ज्ञात करने की एक सरल विधि है। इसके गुण एवं दोष विस्तार के भांति ही होते हैं।

6.6.2 चतुर्थक विचलन (QUARTILE DEVIATION)

अंतरचतुर्थक विस्तार के अंतर को चतुर्थक विचलन कहा जाता है। (Q3 – Q1) तृतीय चतुर्थक तथा प्रथम चतुर्थक के अंतर को अन्तरचतुर्थक विचलन कहा जाता है। इसे अर्ध चतुर्थक विस्तार भी कहते हैं। अर्थात् (सूत्र)

6.6.3 चतुर्थक विचलन (QUARTILE DEVIATION, Q.D.)

Q.D. = Q3 – Q1/ 2

इसे अर्ध चतुर्थक विस्तार (Semi Interquartile Range) भी कहते हैं

चतुर्थक विचलन Q3 – Q1 / 2 दो चतुर्थकों को तृतीय चतुर्थक तथा प्रथम चतुर्थक के बीच के अंतर का औसत है।

© JCERT not to be republished

6.6.4 चतुर्थक विचलन का गुणांक(Coefficient of Quartile Deviation) : चतुर्थक विचलन अपकिरण का एक निरपेक्ष माप होता है। अन्य श्रेणियों से तुलना योग बनाने के लिए इसका गुणक निकालकर इसे सापेक्ष रूप में बदल देते हैं। सूत्र :

$$\text{चतुर्थक विचलन का गुणांक} = \frac{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}{\frac{Q_3 + Q_1}{2}} \quad \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

चतुर्थक विचलन की गणना : चतुर्थक विचलन की गणना तीन दशाओं में किया जाता है :–

1. व्यक्तिगत श्रेणी (Individual series)
2. खंडित श्रेणी (discrete serie)
3. सतत श्रेणी (continuous serie)

6.6.4a व्यक्तिगत श्रेणी में चतुर्थक विचलन की गणना :

उदहारण : नीचे 7 मजदूरों की दैनिक मजदूरी दी गई है मजदूरी का (रुपए में) चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए : – 120, 70, 150, 100, 190, 170, 250 ।

हल – यहां N= 7 है।

आंकड़ों को आरोही क्रम में सजाने पर हम पाते हैं कि –

70, 100, 120, 150, 170, 250

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ वें पद का आकार

$= \frac{7+1}{4}$

= 2 वें पद का आकार

$Q_1 =$ 100 रू.

$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ वें पद का आकार

$= \frac{3(7+1)}{4}$

= 6 वें पद का आकार

© JCERT not to be republished

$Q_3 = 190$

चतुर्थक विचलन (QD) = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{190-100}{2}$

$= \frac{90}{290} = 45$

चतुर्थक विचलन का गुणांक

$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$\frac{190 - 100}{190+100} = 90/290$

$= 0.310$

प्रश्न — 20 एकड़ भूमि पर गेहूं का उत्पादन (किलोग्राम में) दिया है। जिसका चतुर्थक विचलन और चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात करे।

1120, 1240, 1320, 1040, 1080, 1200, 1440, 1360, 1680, 1730, 1785, 1342, 1960, 1880, 1755, 1720, 1600, 1470,1750, 1885

6.6.4b खंडित श्रेणी में चतुर्थक विचलन की गणना —

उदाहरण — एक विशेष बाजार में आयकर विभाग ने विभिन्न फर्मों से निम्न प्रकार कर एकत्र किया —

कर की राशि (हजार रु .में)	10	11	12	13	14
फर्मों की संख्या	3	12	18	12	3

हल —

कर की राशि (हजार रूपए में)	फलों की संख्या	संचय बारंबारता
10	3	3
11	12	15
12	18	33
13	12	45
14	3	48
	$\Sigma f / = 48$	

© JCERT not to be republished

यहां N=48 हैं

$$= \frac{N+1}{4}$$ वें मद का आकार

$$= \frac{48+1}{4}$$ वें मद का आकार

= 12.25 वें मद का आकार

= 11 (हजार रू.)

$$= \frac{X(N+1)}{4}$$ वें मद का आकार

$$= \frac{3(48+1)}{4}$$ वें मद का आकार

= 36.75 वें मद का आकार

= 13 (हजार रू.)

चतुर्थक विचलन (Q.D.) = $\frac{Q_3 - Q_1}{100}$ त्र $\frac{13-11}{100}$

चतुर्थक विचलन गुणांक = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{13-11}{13+11}$ = 0.083 (हजार रू.)

6.6.4c सतत या अखंडित श्रेणी में चतुर्थक विचलन की गणना :

उदाहरण : निम्न वितरण से चतुर्थक विचलन और चतुर्थक विचलन का गुणांक की गणना कीजिए –

सप्ताहिक वेतन (हजार रू. में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
श्रमिकों की संख्या	14	24	38	20	04

हल :

सप्ताहिक मजदूरी (हजार रू. में)	श्रमिकों की आवृत्ति (F)	संचय बारंबरता C. F.
0-10	14	14
10-20	24	38
20-30	38	76
30-40	20	96
40-50	4	100 = N
	$\Sigma f = 100$	

© JCERT not to be republished

Q_1 = N/4 वें पद का आकार

= 100/4

= 25 वाँ पद

25 वाँ पद वर्ग अंतर 10 से 20 में स्थित है। Q_1 का वास्तविक मूल्य निकालने के लिए नियम सूत्र का प्रयोग करेंगे।

(L1=10, C=14, F=24, i=10)

$$Q_1 = 4 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{4} - c\right)$$

$$= 10 + \frac{10}{24}(24 - 14)$$

$$= 10 + \frac{10 \times 11}{24}$$

$$= 10 + 2.58$$

$$Q_1 = 12.58$$

Q_3=(3N) वें पद का आकार

$$Q_3 = \left(\frac{3N}{4}\right)$$

$$= \frac{3 \times 100}{4}$$

$$= 75$$

75 वां पद वर्ग अंतर 20 से 30 में स्थित है। Q_3 का वास्तविक मूल्य निकालने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे :

(L1=20, i=10, f=38, c=38)

© JCERT not to be republished

$$Q_3 = L_1 = \frac{i}{f}\left(\frac{3N}{4} - c\right)$$

$$= 20 + \frac{10}{38(75-38)}$$

$$= 20 + \frac{10 \times 37}{38}$$

$$= 20 + 9.74$$

$$Q_3 = 29.74$$

अतः अंतर चतुर्थक विस्तार

$= Q_3 - Q_1 = 29.74 - 12.58 = 17.16$

चतुर्थक विचलन $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{29.74 - 12.58}{2}$$

$$= \frac{17.16}{2} = 8.58$$

© JCERT not to be republished

अभ्यास प्रश्न

1. निम्न श्रेणी में चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

फार्म का लाभ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
फर्म की संख्या	3	9	12	20	8	6	6	5

उत्तर : चतुर्थक विचलन गुणांक = 0.342

2. निम्न आंकड़ों का चतुर्थक विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात करें।

8, 9, 11, 12, 13, 17, 20, 21, 23, 25, 27

उत्तर : Q.D.= 6, coefficient of Q.D.= 0-353

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. निम्न में से कौन–सा अपकिरण की माप है।

(क) प्रतिशतता (ख) चतुर्थक

(ग) अंतर चतुर्थक विस्तार (घ) उपरोक्त सभी अपकिरण की माप है।

2. अंतर चतुर्थक विस्तार है

(क) पचासवां प्रतिशतता

(ख) मानक विचलन का द्वितीय नाम

(ग) अधिकतम और न्यूनतम मूल्यों के मध्य का अंतर

(घ) प्रथम चतुर्थक और तृतीय चतुर्थक के बीच का अंतर

3. निम्न में से विस्तार की कौन–सी सीमा अंतर चतुर्थक विस्तार द्वारा दूर की जा सकती है

(क) विस्तार विचलन जब शून्य होता है।

(ख) जब विस्तार की गणना करना कठिन होता है।

(ग) चरम मूल्यों से विस्तार का अधिक प्रभावित होना ।

(घ) विस्तार जब ऋणात्मक हो ।

4. एक अन्वेषक ने निम्न निदर्श समंकों का संकलन किया है, उन निदर्शकों का माध्य 5 है 3, 5, 12, 3, 2 इनका अंतर चतुर्थक विस्तार है

(क) 1 (ख) 2

(ग) 10 (घ) 12

उत्तर – 1–C, 2–D, 3–C, 4–B ।

6.7.1 माध्य विचलन (MEAN DEVIATION)

© JCERT not to be republished

श्रृंखला के किसी केंद्रीय प्रवृत्ति के माप (अंकगणितीय माध्य, माध्यिका या बहुलक) से निकाले गए विभिन्न मूल्यों के विचलनों के अंकगणितीय मध्य को उसका माध्य विचलन कहा जाता है। माध्य विचलन वितरण के सभी पदों पर आधारित है। इसे औसत के रूप में ज्ञात किया जाता है। अंकगणितीय माध्य, माध्यिका अथवा बहुलक सामान्यतः माध्य के द्वारा ज्ञात विचलनों आधार पर मूल्यों के विचलन निकालते समय बीजगणितीय चिन्ह. तथा ऋणात्मक चिन्ह को छोड़ दिया जाता है। अर्थात् ऋणात्मक विचलन भी धनात्मक मान लिए जाते हैं। संकेत देते हैं कि निरपेक्ष मूल्यों को ही लिया गया है, इसे आदर्श मूल्य भी कहा जाता है।

6.7.2 माध्य विचलन की गणना

A. व्यक्तिगत श्रेणी

1. आंकड़ों को आरोही क्रम में सजाए जाते हैं।
2. माध्य/माध्यिका की गणना किया जाता है।
3. माध्य/माध्यिका/बहुलक से विचलन ज्ञात किया जाता है। तथा (–) के चिन्ह पर ध्यान ना दे कर $|d|$ में विचलन दर्शाए जाते हैं।
4.' इन विचलनों का योग $\sum |d|$ प्राप्त किया जाता है तथा उसको पदों की संख्या से भाग दे दिया जाता है।

5. माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित में से किसी एक सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

(i) माध्य से माध्य विचलन $\delta_{\overline{X}} = \frac{\sum |d_{\overline{X}}|}{N}$ जहाँ $\delta_{\overline{X}} = X - \overline{X}$

(ii) मध्यिका से माध्य विचलन $\delta_{\overline{M}} = \frac{\sum |d_{\overline{M}}|}{N}$ जहाँ $\delta_{\overline{M}} = X - M$

(iii) भृष्ठियक से माध्य विचलन $\delta_Z = \frac{\sum |d_Z|}{N}$ जहाँ $\delta_Z = X - Z$

6.7.3 माध्य विचलन गुणांक

माध्य विचलन एक निरपेक्ष माफ है। माध्य विचलन गुणांक एक सापेक्ष माप है। जिसकी गणना के लिए माध्य विचलन में क्रमशः उन्हीं माध्यों का भाग देंगे जिनकी सहायता से वे प्राप्त किए जाते हैं। इनके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किए जाते हैं:

(i) समान्तर माध्य से माध्य विचलन गुणांक $= \frac{\delta_X}{X} = \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{समान्तर माध्य}}$

(ii) माध्यिका से माध्य विचलन गुणांक $= \frac{\delta_M}{M} = \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{मध्यिका}}$

(iii) भृष्ठियक से माध्य विचलन गुणांक $= \frac{\delta_Z}{Z} = \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{भृष्ठियक}}$

व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य विचलन और उसके गुणांक की गणना के पद

1. समकों को X से संबोधित कीजीये।
2. श्रेणी के माध्य (X) की गणना कीजीए।
3. माध्य से श्रेणी के प्रत्येक पद का विचलन लीजीए और इन्हें dx से सम्बोधित कीजीए।
4. विचलनों से + और - चिह्नों की ओर ध्यान न देते हुए विचलनों के केवल मूल्यों को जोड़ दें। परिणाम को Σ I dx I से सम्बोधित करें।
5. अन्त में सूत्र अपनायें।

© JCERT not to be republished

प्र.1. कद (फुटों में) तथा वजन (किलोग्राम में) के बीच सहसंबंध गुणांक की इकाई है :

क) कि. ग्रा/फुट (ख) प्रतिशत

(ग) अविद्यमान

उत्तर : (ग) अविद्यमान

प्र.2. सरल सहसंबंध गुणांक का परास निम्नलिखित होगा।

(क) 0 से अनंत तक (ख) –1 से 1 तक

(ग) ऋणात्मक अनंत से धनात्मक अनंत तक

उत्तर : (ख) –1 से 1 तक

प्र.3. यदि rxy धनात्मक है तो x और y के बीच का संबंध इस प्रकार का होता है।

(क) जब x बढ़ता है तो y बढ़ता है।

(ख) जब x घटता है तो y बढ़ता है।

(ग) जब x बढ़ता है तो y नहीं बदलता है।

उत्तर : (क) जब x बढ़ता है तो y बढ़ता है।

प्र.4. यदि rxy = 0 तब चर x और y के बीच :

(क) रेखीय संबंध होगा।

(ख) रेखीय संबंध नहीं होगा

(ग) स्वतंत्र होगा

उत्तर : (ख) रेखीय संबंध नहीं होगा

प्र.5. निम्नलिखित तीनों मापों में कौन–सा माप किसी भी प्रकार के संबंध की माप कर सकता है।

(क) कार्ल पियरसन सहसंबंध गुणांक

(ख) स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध

(ग) प्रकीर्ण आरेख

उत्तर : (ख) स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध

प्र.6. यदि परिशुद्ध रूप में मापित आँकड़े उपलब्ध हों, तो सरल सहसंबंध गुणांक:

(क) कोटि सहसंबंध गुणांक से अधिक सही होता है।

(ख) कोटि सहसंबंध गुणांक से कम सही होता है।

(ग) कोटि सहसंबंध की ही भाँति सही होती है।

उत्तर (ग) कोटि सहसंबंध की ही भाँति सही होता है।

© JCERT not to be republished

प्र.7. साहचर्य के माप के लिए r को सहप्रसरण से अधिक प्राथमिकता क्यों दी जाती है?

उत्तर : साहचर्य का माप x और y के बीच सहसंबंध गुणांक का चिह्न निश्चित करता है। मानक विचलन सदा धनात्मक होते हैं। जब सहप्रसरण शून्य होता है तो सहसंबंध भी शून्य होता है। सहसंबंध को सहप्रसरण से साहचर्य के माने के लिए अधिक प्राथमिकता दी जाती है क्योंकि

(क) यह धनात्मक ऋणात्मक और शून्य सहसंबंध के विषय में बताता है।

(ख) सहसंबंध मूलों और पैमानों से स्वतंत्र होते हैं।

प्र.8. क्या आँकड़ों के प्रकार के आधार पर त, –1 तथा .1 के बाहर स्थित हो सकता है?

उत्तर : r(+1<r-1)+1 और –1 के बीच में स्थित होता है और यदि यह +1 से बाहर हो तो इसका अर्थ है कि दो चरों में संबंध आरेखीय है। अत : इसका विवेचन करते हुए हमें यह याद रखना होगा कि अवश्य इसमें कुछ त्रुटियाँ हैं।

प्र.9. क्या सहसंबंध के द्वारा कार्यकारण संबंध की जानकारी मिलती है?

उत्तर : नहीं सहसंबंध द्वारा कार्यकारण की जानकारी नहीं मिलती। अकसर विद्यार्थी यह विश्वास करने लगते हैं कि सहसंबंध दो चरों में वहाँ सहसबंधं सुझाता है जहाँ एक का कारण दूसरा है। उदाहरणः यह वस्तु की माँगी गई मात्रा और कीमत में सहसंबंध स्पष्टः कीमत में वृद्धि तथा माँगी गई मात्रा में कमी का कारण है और इसके विपरीत भी। कीमत में परिवर्तन माँगी गई मात्रा में परिवर्तन लाता है। परंतु जिस बिंदु पर ज्यादा बल देने की आवश्यकता है वह यह है कि चरों के बीच कारण और प्रभाव संबंध सहसंबंध के सिद्धांत में कोई भी पूर्व–स्थिति नहीं है। सहसंबंध दो चरों के बीच किसी कारण और प्रभाव संबंध के साथ या उसके बिना, संबंध की कोटि और तीव्रता को मापता है। सहसंबंध दो या दो से अधिक चर–मूलों में पारस्परिक संबंध की दिशा तथा मात्रा का अकात्मक माप है। परंतु सहसंबंध की उपस्थिति से यह नहीं मान लेना चाहिए कि दोनों चरों में आवश्यक रूप से प्रत्यक्ष कारण तथा परिणाम संबंध है। सह–संबंध सदैव कारण परिणाम संबंध से ही उत्पन्न नहीं होता। परंतु कारण–परिणाम संबंध होने पर निश्चित रूप से सहसंबंध पाया जाता है।

प्र.10. सरल सहसंबंध गुणांक की तुलना में कोटि सहसंबंध गुणांक कब अधिक परिशुद्ध होता है?

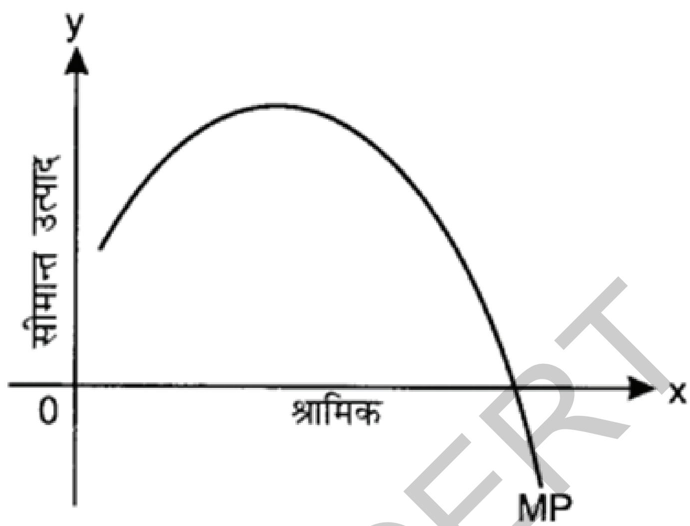
उत्तर : सरल सहसंबंध गुणांक की तुलना में कोटि सहसंबंध गुणांक अधिक परिशुद्ध होता है क्योंकि

1. इस विधि का उस स्थिति में भी सुगमता से प्रयोग किया जाता है जबकि आँकड़ों के स्थान पर केवल श्रेणियाँ ही दी गई हों तथा साधारण गुणात्मक श्रृंखलाओं के ढीले सहसंबंध अनुमान लगाने के लिए भी प्रयोग किया जा सकता है।
2. स्पीयरमैन श्रेणी अंतर सह–संबंध विधि पियरसन के सह–संबंध गुणांक की अपेक्षा समझने में सरल है।
3. यह विधि गुणात्मक चरों की अच्छाई, बुराई, बुद्धिमत्ता, सुंदरता व पवित्रता आदि के सह–संबंधों को ज्ञात करने के लिए श्रेष्ठ है।

© JCERT not to be republished

प्र.11. क्या शून्य सह–संबंध का अर्थ स्वतंत्रता है?

उत्तर : शून्य सहसंबंध का अर्थ स्वतंत्रता नहीं है अपितु इसका अर्थ रेखीय। सहसंबंध की स्वतंत्रता है। दो चरों में आरेखीय सहसंबंध होने पर जब उन्हें प्रकीर्ण आरेख पर दर्शाया जायेगा। तो वे शून्य सहसंबंध दर्शायेंगे तथा जब उन्हें पियरसन या स्पीयरमैन विधि से निकाला जाता है तो यह निम्न सहसंबंध का मान देगा। नीचे दी गई आकृति के द्वारा इसे समझा जा सकता है।



इसे शून्य सहसंबंध माना जायेगा, जबकि एक स्तर तक x और y धनात्मक रूप से संबंधित है तथा तदुपरांत उनमें ऋणात्मक सहसंबंध है।

प्र.12. क्या सरल सहसंबंध गुणांक किसी भी प्रकार के संबंध को माप सकता है?

उत्तर : नहीं, सरल सहसंबध गुणाक केवल रेखीय सहसंबंध माप सकता है।

(क) यह आरेखीय सहसंबंध नहीं माप सकता।

(ख) यह ऐसे चरों के बीच सहसंबंध ज्ञात नहीं कर सकता जो संख्यात्मक रूप में व्यक्त नहीं किये जा सकते।

(ग) यह धनात्मक, ऋणात्मक तथा रेखीय सहसंबंध की अनुपस्थिति को माप सकता है।

प्र.13. अपनी कक्षा के सहपाठियों के कद मापिए। उनसे उनके बेंच पर बैठे सहपाठी का कद पूछिए। इन दो चरों का सहसंबंध गुणांक परिकलित कीजिए और परिणाम का निर्वचन कीजिए।

उत्तर : सभी बेंचों पर दायीं ओर बैठे छात्र को X तथा बायीं ओर बैठे छात्र की Y कहें। यदि कक्षा में 40 विद्यार्थी हैं तो 20 जोड़े बन जायेंगे। यदि संख्या विषम है तो एक विद्यार्थी को छोड़ना होगा। उनके कद ज्ञात करके कार्ल पियरसन की किसी भी विधि द्वारा सहसंबंध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

प्र.14. कुछ ऐसे चरों की सूची बनाएँ जिनका परिशुद्ध माप कठिन हो।

उत्तर : ऐसे कुछ चर इस प्रकार हैं :

© JCERT not to be republished

(क) सुंदरता (ख) बुद्धिमत्ता

(ग) ईमानदार (घ) अनुशासन

(ङ) आत्मविश्वास (च) संस्कार

प्र.15. r के विभिन्न मानों. 1, –1, तथा 0 की व्याख्या करें।

उत्तर : r =. 1 पूर्ण धनात्मक सहसंबंध

r = –1 पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध,

r = 0 रेखीय सहसंबंध की अनुपस्थिति।

प्र.16. पियरसन सहसंबंध गुणांक से कोटि सहसंबंध गुणांक क्यों भिन्न होता है?

उत्तर : पियरसन सहसंबंध गुणांक की भाँति श्रेणी सहसंबंध भी. 1 तथा -1 के बीच स्थित होता है। हालाँकि, सामान्य तौर पर यह सामान्य विधि की तरह यथावत नहीं होता है। इसका कारण यह है कि इसमें आँकड़ों से संबंधित सभी सूचनाओं का उपयोग नहीं होता है। श्रृंखला में मदों के मानों के वे प्रथम अंतर जो उनके परिमाण के अनुसार क्रम में व्यवस्थित किए जाते हैं, आमतौर पर कभी स्थिर नहीं होते। सामान्यतः आँकड़ा–कुछ केंद्रीय मानों के आसपास सारणी के मध्य में थोड़े बहुत अंतर पर एकत्रित होते हैं। यदि समान अन्तर स्थिर होते, तब त और ता समान परिमाण देते। प्रथम अतंर तथा क्रमिक मानों में अंतर होता है। कोटि सहसंबंध को पियरसन गुणांक की अपेक्षा तब अधिक प्राथमिकता दी जाती है, जब चरम मान दिए गए हों। सामान्यतः ता का मान त से कम या इसके बराबर होता है।

प्र.17. पिताओं (x) और उनके पुत्रों (y) के कदो का माप नीचे इंचों में दिया गया है। इन दोनों के बीच सहसंबंध गुणांक परिकलित कीजिए।

x:	65	66	57	67	68	69	70	72
y:	67	56	65	68	72	72	69	71

उत्तर

x	y	dx	dy	dx^2	dy^2	dxdy
65	67	-2	-1	4	1	2
66	56	-1	-12	1	144	12
57	65	-10	-3	100	9	30
67	68	0	0	0	0	0
68	72	+1	+4	1	16	4
69	72	+2	+4	4	16	8
70	69	+3	+1	9	1	3
72	71	+5	+3	25	9	15
कुल		$\Sigma dx = -2$	$\Sigma dy = -4$	$\Sigma dx^2 = 149$	$\Sigma dy^2 = 196$	$\Sigma dxdy = 70$

© JCERT not to be republished

प्र.18. x और y के बीच सहसंबंध गुणांक को परिकलित कीजिए और उनके संबंध पर टिप्पणी कीजिए।

x:	-3	-2	-1	1	2	3
y:	9	4	1	1	4	9

उत्तर :

x	x^2	y	y^2	xy
-3	9	9	81	-27
-2	4	4	16	-8
-1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1
2	4	4	16	8
3	9	9	81	27
कुल $\Sigma X = -2$	$\Sigma x^2 = 28$	$\Sigma y = 28$	$\Sigma y^2 = 196$	$\Sigma xy = 0$

$$r = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2 \left[n\sum y2 - (\sum y)2\right]}}$$

$$r = \frac{60(0) - (-2)\times(28)}{\sqrt{6(28) - (-2)^2 \left[6(196) - (28)2\right]}}$$

$$r = \frac{-56}{\sqrt{52 \times 392}}$$

प्र.19. x और y के बीच सहसंबंध गुणांक परिकलित कीजिए और उनके संबंध पर टिप्पणी कीजिए।

x:	1	3	4	5	7	8
y:	2	6	8	10	11	16

उत्तर :

x	x^2	y	y^2	xy
1	1	2	4	2
3	9	6	16	18
4	16	8	64	32
5	25	10	100	50
7	49	14	196	98
8	64	16	256	144
कुल $\Sigma x = 23$	$\Sigma x^2 = 164$	$\Sigma y = 56$	$\Sigma y^2 = 636$	$\Sigma xy = 344$

00

© JCERT not to be republished

$$r = \frac{n\left(\sum xy\right) - \frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{N}}{\sqrt{\sum x^2 - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2 \left[n \sum y2 - \left(\frac{\sum y}{N}\right)2\right]}}$$

$$r = \frac{344 - \frac{(56)\times(23)}{6}}{\sqrt{164 - \left(\frac{23}{6}\right)^2}\sqrt{636 - \left(\frac{56}{6}\right)^2}}$$

$$r = \frac{344 - 214.44}{\sqrt{164 - 14.69}\sqrt{636 - 87.111}}$$

$$= \frac{129.6}{\sqrt{149.31}\sqrt{548.89}} = \frac{129.6}{\sqrt{81954.7659}} = \frac{129.56}{286.27}$$

$$= \pm 0.45$$

© JCERT not to be republished